

DS 3 de physique

Le sujet comprend trois exercices à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroté les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

I. Interféromètre de Michelson

On donne le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. On note Ox et Oy deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre. S est une source lumineuse ponctuelle située sur Ox . M_1 et M_2 sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à Ox en H_1 et respectivement à Oy en H_2 . Le trait incliné à 45° , noté Ls , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux. Lp désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe Oy . Un écran E est placé dans le plan focal image de Lp . On note C le foyer image de Lp et f' sa distance focale image.

1. Nommer les lames qui composent Ls . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.

2. Un rayon lumineux, noté (r) , émis par S , a été représenté sur le schéma en annexe 1. Sur ce schéma, à rendre avec la copie, construire le miroir fictif M'_1 justifiant de la dénomination lame d'air. Construire jusqu'à l'écran, les rayons issus de S , réfléchis sur les miroirs M_1 et M_2 . On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

3. En appelant e l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, démontrer la différence de marche δ au centre C de l'écran.

4. Quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (justifier le résultat). Comment nomme-t-on ces franges?

5. Le centre de l'écran est brillant. On pose $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$. Exprimer p_k , l'ordre d'interférence de la k ème frange brillante, en fonction de p_0 et k . Exprimer, dans les conditions de Gauss, r_k , le rayon de la k ème frange brillante en fonction de f' , k et p_0 . Donnée: $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$

II. Réseau à échelottes

Un réseau échelotte (figure 2) est un réseau de miroirs placés en marches d'escalier. On note h la hauteur de la marche et a l'espacement horizontal entre les centres M_i de deux miroirs successifs. Le réseau est éclairé en incidence normale par une source lumineuse S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ , située à l'infini. Après avoir rencontré le réseau, les rayons lumineux sont diffractés dans toutes les directions. La caméra d'observation est située au point P à l'infini, faisant un angle θ par rapport à la normale aux miroirs. Par ailleurs, la hauteur h est largement exagérée sur le schéma de la figure 2. On considérera que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ sans se préoccuper du fait que le rayon diffracté peut heurter la partie verticale de la marche voisine.

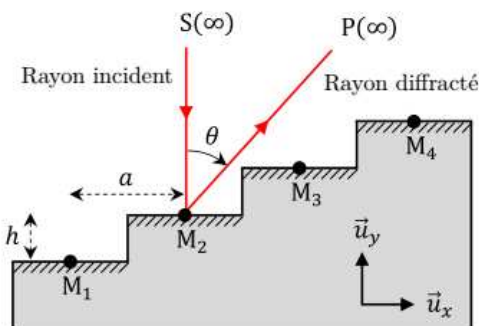


Figure 2 – Réseau échelotte

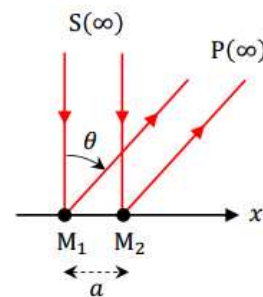


Figure 3 – Réseau de 2 miroirs ponctuels

On note I_N l'intensité lumineuse en P pour des interférences à N ondes et I_0 l'intensité d'une onde lumineuse, les ondes réfléchies sur les miroirs ont toutes la même intensité I_0 .

Interférences à deux ondes

On considère, dans un premier temps, un réseau de $N = 2$ miroirs ponctuels M_1 et M_2 , espacés d'une distance a et d'une hauteur $h = 0$ (figure 3).

1. Établir l'expression de la différence de marche $\delta = (SM_1P) - (SM_2P)$ entre les rayons passant par M_1 et M_2 en fonction de a et θ (attention les angles ne sont pas petits). En déduire l'expression du déphasage ϕ correspondant en fonction de a , θ et λ .

2. Donner l'expression de l'intensité $I_2(\phi)$ au point P en fonction de ϕ , puis la tracer.

Préciser, sans calcul, les valeurs de ϕ pour lesquelles on observe des franges brillantes et les valeurs de ϕ pour lesquelles on observe des franges sombres.

Interférences à N ondes

On considère à présent un réseau de $N \gg 1$ miroirs ponctuels M_1 à M_n , espacés d'une distance a et d'une hauteur $h = 0$.

3. Établir l'expression de la différence de marche $\delta_k = (SM_1P) - (SM_kP)$ entre les rayons passant par M_1 et M_k en fonction de δ et k pour $k \geq 1$. En déduire l'expression du déphasage ϕ_k correspondant en fonction de ϕ et k pour $k \geq 1$.

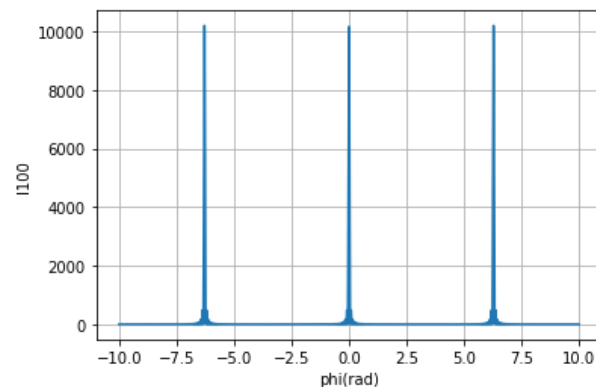
L'amplitude complexe totale diffractée au point P est la somme des amplitudes complexes de chacune des ondes diffractées sur les miroirs M_k soit:

$$\underline{A}_N = A_0(e^{-j\phi_1} + e^{-j\phi_2} + e^{-j\phi_3} + \dots + e^{-j\phi_N})$$

L'intensité lumineuse résultant de la superposition de ces N vibrations lumineuses au point P est obtenue en multipliant l'amplitude complexe $\underline{A}$ par son complexe conjugué $\underline{A}^*$: $I_N = \underline{A}_N \cdot \underline{A}_N^*$.

On désire tracer la courbe donnant l'intensité I_N en fonction de ϕ sous python. Pour cela on écrit le code suivant:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def instruction 1a:
5     A=1
6     for i in range(instruction 1b):
7         A=A+instruction 1c
8     return instruction 1d
9
10 phi=instructions 2a
11 plt.plot(instructions 2b)
12 plt.grid()
13 plt.xlabel(instruction 2c)
14 plt.ylabel(instruction 2d)
15 plt.show()
```



4. Compléter les instructions 1 qui définissent une fonction appelée *intensite* qui utilise les mêmes paramètres ϕ et N notés *phi* et *N*, qui retournent l'expression de l'intensité lumineuse I .

5. Compléter les instructions 2 qui permettent de tracer la courbe I_{100} . Commenter cette courbe.

Annexe python:

L'imaginaire pur j se note $1j$ et la fonction exponentielle se note $np.exp()$ sous numpy

`np.linspace(start,stop,N_points)`

Description : renvoie des nombres uniformément espacés sur un intervalle spécifié.

Arguments d'entrée : `start` : la valeur de départ de la séquence.
`stop` : la valeur de fin de la séquence.
`N_points` : Nombre d'échantillons à générer.

Argument de sortie : un tableau unidimensionnel de `N_points` éléments régulièrement espacés entre `start` et `stop`.

	Commande	Résultat
<i>Exemple :</i>	<code>np.linspace(1,5,5)</code>	<code>[1. 2. 3. 4. 5.]</code>

`a.conjugate()`

Description : renvoie le conjugué complexe de `a`, élément par élément.

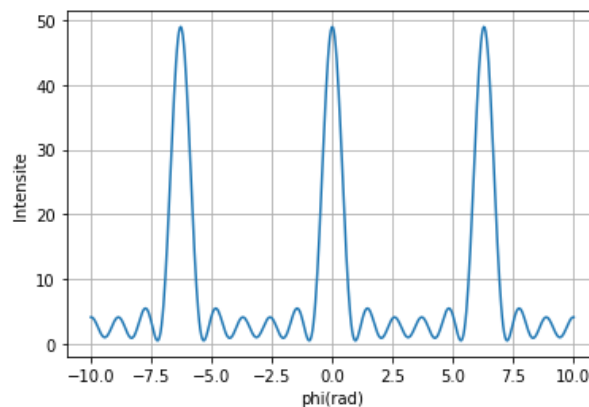
Argument d'entrée : `a`, un tableau de type array.

Argument de sortie : un tableau dont les éléments sont les conjugués complexes de `a`.

<i>Exemple</i>	<code>a=np.array([1j, 2+3j])</code>	
	Commande	Résultat
	<code>a.conjugate()</code>	<code>[-1.j, 2.-3.j]</code>

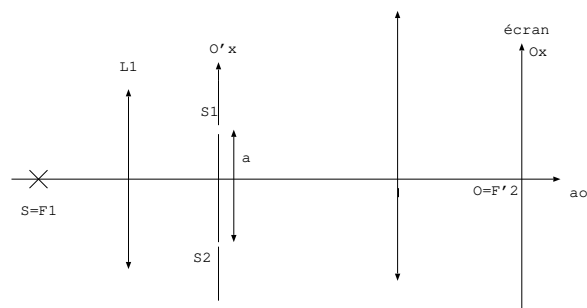
On admet que par le calcul pour N ondes l'intensité s'écrit: $I_N(\phi) = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{N\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right)^2$.

- Donner, sans calcul, les valeurs de ϕ pour lesquelles on observe des franges brillantes.
- Déterminer, en fonction de N , l'expression de la largeur de la frange brillante d'ordre 0 et l'intensité de cette frange brillante (toutes les franges brillantes ont la même intensité et la même demi largeur).
- Déduire de deux façons différentes la valeur numérique de N correspondant à la courbe intensité en fonction de ϕ suivante:



III. Dispositif de Fraunhofer

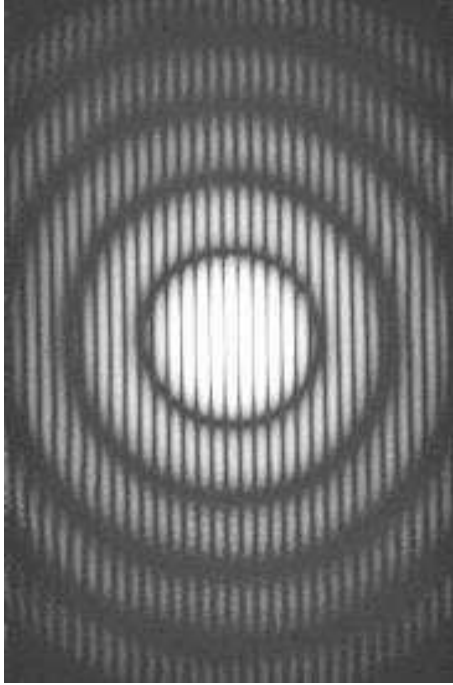
La source principale S monochromatique de longueur d'onde λ se situe au foyer objet de la lentille L_1 . L'écran est dans le plan focal image de la lentille L_2 . Entre les lentilles L_1 et L_2 , on dispose deux trous de rayon R identiques centrées en S_1 et S_2 avec $a = S_1S_2$. Données : $\lambda = 632 \text{ nm}$, $f'_1 = 40 \text{ cm}$ et $f'_2 = 50 \text{ cm}$.



1. Sur l'annexe 2, construire les deux rayons issus de S qui interfèrent en M . Exprimer en fonction de x (abscisse de M sur l'écran et des données, la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$. En déduire l'expression de l'interfrange.

2. Construire sur un schéma, le champ d'interférences de ce dispositif et exprimer sa largeur Δx en fonction des données. Rappel: demi angle au sommet de la tache centrale de diffraction par un trou de rayon R : $\theta_{1/2} = \frac{1,22\lambda}{2R}$.

3. On donne la photo de l'écran:



On donne le code python permettant de calculer a et R en utilisant la méthode de Monte Carlo:

```
1 import numpy as np
2
3 #Données
4 f2,u_f2=50e-2,1e-2
5 l0=632e-9
6 f1,u_f1=40e-2,1e-2
7 # Mesures
8 Deltax=
9 u_Deltax=
10 i=
11 u_i=
12 # Tirage au sort pour la méthode de Monte Carlo
13 N=100
14 MC_Deltax=np.random.normal(Deltax,u_Deltax,N)
15 MC_i=np.random.normal(i,u_i,N)
16 MC_f1=np.random.normal(f1,u_f1,N)
17 MC_f2=np.random.normal(f2,u_f2,N)
18 # Exploitation
19 MC_a=
20 MC_R=
21 print(np.mean(MC_a),np.std(MC_a))
22 print(np.mean(MC_R),np.std(MC_R))
```

```
0.00016970308663798875 1.9351319218092367e-05
1.620619216924971e-05 7.357045247768964e-07
```

Estimer sur la photo Δx , l'incertitude $u(\Delta x)$ de cette mesure, l'interfrange i et estimer l'incertitude $u(i)$ de cette mesure.

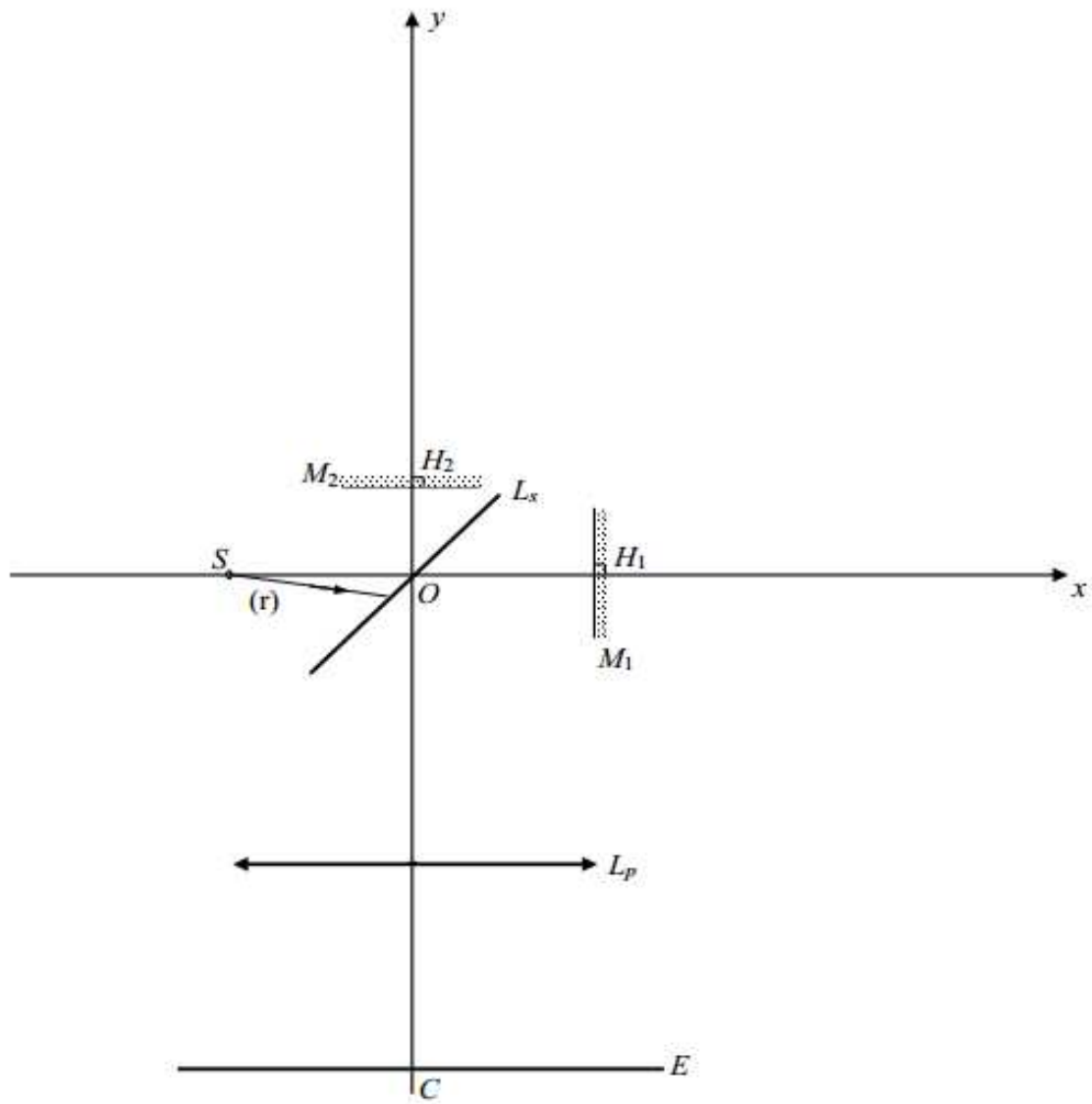
Compléter le code python lignes 8 à 11 et lignes 19 et 20.

Déduire des résultats les valeurs numériques de a et de R en tenant compte de leur incertitude.

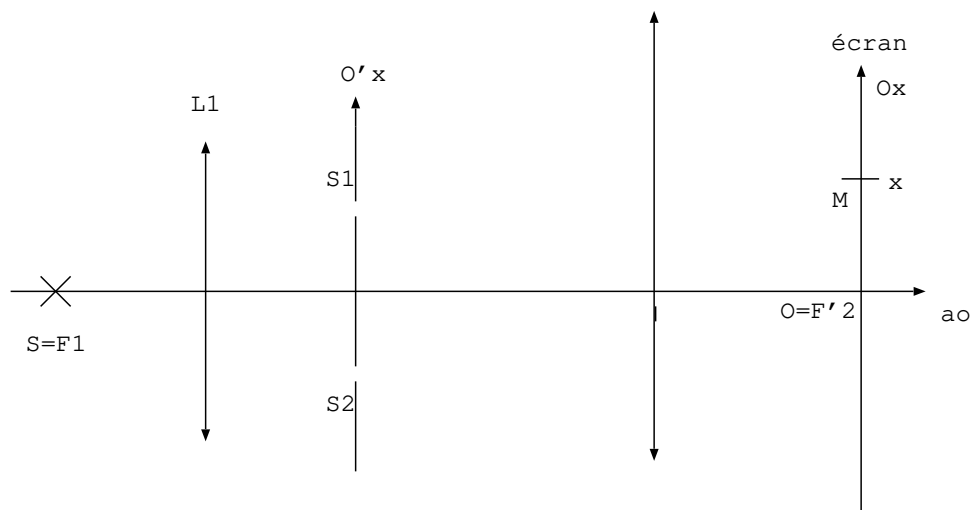
4. On ajoute derrière S_1 une lame d'indice $n = 1,56$ et d'épaisseur $e = 16 \mu m$. Prévoir le sens de déplacement des franges et calculer le nombre de franges brillantes qui ont défilé au point O .

NOM:

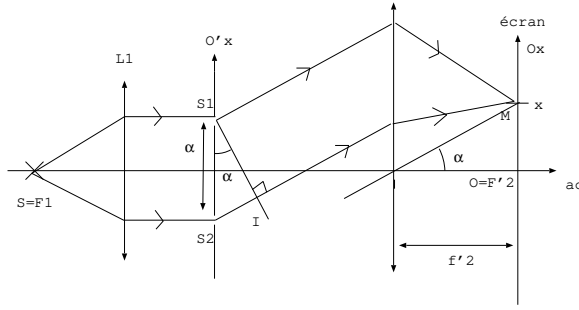
Annexe 1:



Annexe 2:



IV. Correction: Fraunhofer

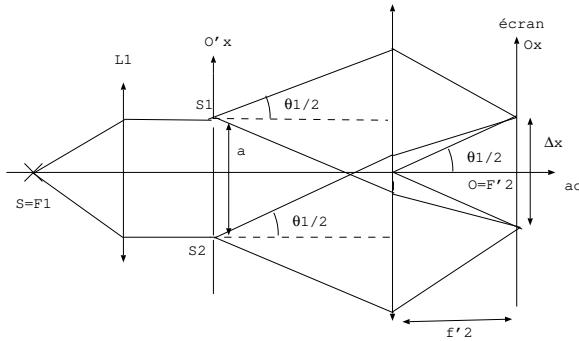


1.

Par principe de retour inverse de la lumière, M se comporte comme une source. Entre une source et une surface d'onde, le chemin optique est constant donc $(S_1M) = (IM)$ et $(SS_1) = (SS_2)$.

$$\delta(M) = (SS_2) + (S_2I) + (IM) - (SS_1) - (S_1M) = IM = a \sin \alpha = a\alpha = \frac{ax}{f'_2}.$$

L'interfrange est la distance entre les milieux de deux franges brillantes voisines. On note x_k la position d'une frange brillante d'ordre k entier on a $p = k = \frac{ax_k}{\lambda f'_2}$ soit $x_k = \frac{k\lambda f'_2}{a}$ et $i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda f'_2}{a}$.



2.

Les deux taches centrales de diffraction se superposent, le champ d'interférences a pour largeur Δx telle que: $\tan \theta_{1/2} \approx \theta_{1/2} = \frac{\Delta x}{2f'_2} = \frac{1,22\lambda}{2R}$, on a donc $\Delta x = \frac{1,22\lambda f'_2}{R}$.

3. Je mesure $11i = 2,1 \text{ cm}$ soit $i = 1,9 \text{ mm}$ avec l'incertitude pour $11i$ de l'ordre de 2 mm (1 graduation de chaque côté de la mesure) soit $u(i) = \frac{2}{11} = 0,2 \text{ mm}$.

Je mesure $\Delta x_{\min} = 2,3 \text{ cm}$ et $\Delta x_{\max} = 2,5 \text{ cm}$, on a donc $\Delta x = \frac{\Delta x_{\min} + \Delta x_{\max}}{2} = 2,4 \text{ cm}$ et $u(\Delta x) = \frac{\Delta x_{\max} - \Delta x_{\min}}{2} = 0,1 \text{ cm}$.

On a $i = \frac{\lambda f'_2}{a}$ soit $a = \frac{\lambda f'_2}{i}$. De même on a $\Delta x = \frac{1,22\lambda f'_2}{R}$ soit $R = \frac{1,22\lambda f'_2}{\Delta x}$.

Code python:

```
8 Deltax=2.4e-2
9 u_Deltax=0.1e-2
10 i=1.9e-3
11 u_i=0.2e-3
```

```
19 MC_a=l0*MC_f2/MC_i
20 MC_R=1.22*l0*MC_f2/MC_Deltax
```

np.mean désigne la valeur moyenne et np.std l'écart type soit:

$a = (17 \pm 2) \cdot 10^{-5} \text{ m}$ et $R = (16,2 \pm 0,7) \mu\text{m}$.

4. Derrière S_1 le chemin optique est augmenté à cause de la lame, donc pour compenser la frange centrale se trouve au dessus de O pour que le rayon passant par S_1 parcourt une distance plus faible jusqu'à l'écran.

$$\delta_{\text{avec lame}}(O) = \delta_{\text{sans lame}}(O) + \delta_{\text{lame}} = 0 + (1 - n)e.$$

AN: $p_{\text{avec lame}}(O) = \frac{(1 - n)e}{\lambda} = -14,2 < 0$: donc les franges sont bien montées et au point O , ont défilé les franges brillantes $p = 1, 2, \dots, 14$ soit 14 franges brillantes.

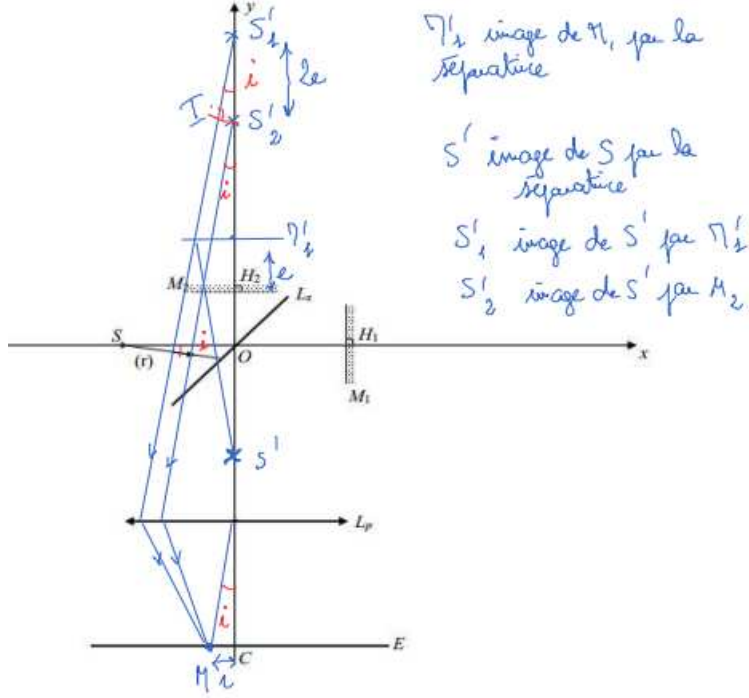
V. Correction: interféromètre de Michelson d'après CCINP 2018

1. L_s est composé d'une lame séparatrice et d'une lame compensatrice. Ces sont des lames de verre du même indice n et de la même épaisseur e . La séparatrice présente un dépôt métallique sur une de ces faces pour réfléchir la moitié de l'intensité incidente.

La séparatrice sert à séparer les rayons pour qu'il y ait un rayon partant en direction de M_1 et un rayon en direction de M_2 .

La compensatrice sert à ce que les deux rayons traversent le même nombre de fois les lames, ainsi la différence de marche entre les rayons liée à la présence des lames est nulle.

2.



3. Par construction des sources secondaires, les rayons semblent venir de S'_1 et S'_2 .

Par principe de retour inverse de la lumière, M se comporte comme une source. Entre la source M et la surface d'onde IS'_2 le chemin optique est constant donc $(S'_2M) = (IM)$ soit $\delta = (S'_1M) - (S'_2M) = (S'_1I) + (IM) - (S'_2M) = S'_1I = 2e \cos i$.

4. Les points qui sont sur une même frange ont le même ordre d'interférences et donc la même valeur de i , ces points sont donc sur un cercle de centre C , on appelle ces franges, des franges d'égale inclinaison.

5. On a $p_k = p_0 \cos i_k = p_0 - k$ en effet le centre de l'écran est brillant donc p_0 est un entier. Quand on s'éloigne du centre de l'écran, l'ordre d'interférences diminue et sur une frange brillante, p_k est également un entier.

Dans les conditions de Gauss on a $p_k = p_0(1 - \frac{i_k^2}{2})$ soit $i_k = \sqrt{2(1 - \frac{p}{p_0})}$.

On a $\tan i_k = \frac{r_k}{f'} \approx i_k$ donc $r_k = f' i_k = f' \sqrt{2(1 - \frac{p}{p_0})}$.

VI. Réseau à échelettes (d'après centrale PC 2026 et modélisation PC 2026)

1. Par principe de retour inverse de la lumière, P se comporte comme une source et entre la source P et la surface d'onde IM_2 le chemin optique est constant donc $(IP) = (M_2P)$.

De même entre la source S et la surface d'onde M_1M_2 le chemin optique est constant.

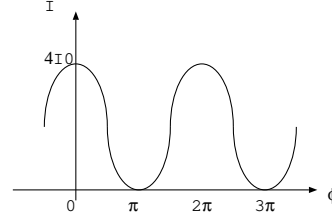
On a donc $\delta = (SM_1) + (M_1I) + (IP) - (SM_2) - (M_2P) = (IP) = IP$ avec $\sin \theta = \frac{IP}{a}$ soit $\delta = a \sin \theta$.

Le déphasage correspondant est $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$.

2. On applique la formule de Fresnel pour des interférences à deux ondes cohérentes de même intensité: $I_2(\phi) = 2I_0(1 + \cos \phi)$.

Les franges brillantes s'obtiennent pour des trains d'onde en phase, ou des ordres d'interférences entiers soit pour $\phi = 0, \phi = \pm 2\pi, \phi = \pm 4\pi \dots$

Les franges sombres s'obtiennent pour des trains d'onde en opposition de phase, ou des ordres d'interférences demi entiers soit pour $\phi = \pm \pi, \phi = \pm 3\pi, \dots$



3. La différence de marche entre deux ondes réfléchies sur des miroirs voisins est toujours δ donc $\delta_k = (k-1)\delta$ et le déphasage correspondant est $\phi_k = (k-1)\phi$.

4. instruction 1a: `intensite(phi,N):`

instruction 1b: `N` (i prend alors les valeurs $0, 1, 2, \dots, N-1$)

instruction 1c: `np.exp(-1j*i*phi)`

instruction 1d: `A*np.conjugate(A)`

5. instruction 2a: `np.linspace(-10,10,1000)` (on trace courbe pour ϕ variant entre -10 rad et $+10 \text{ rad}$ et on prend 1000 points pour tracer cette courbe)

instruction 2b: `phi,intensite(phi,100)` (on trace I pour $N = 100$ en fonction de ϕ)

instruction 2c: `'phi(rad)'`

instruction 2d: `'I100'`

On observe que les franges brillantes se trouvent toujours pour $\phi = 0, \phi = \pm 2\pi \dots$ comme pour des interférences à 2 ondes mais les franges brillantes sont beaucoup plus intenses et beaucoup plus étroites pour des interférences à N ondes.

6. Les franges brillantes correspondent à $\phi = 2p\pi$ avec p entier relatif.

7. Pour $p = 0$ on a $\phi = 0$ soit on établit l'intensité de la frange brillante en se plaçant pour $\phi \approx 0$:

$$I = \left(\frac{N\phi}{2}\right)^2 = N^2 I_0.$$

On résoud $I = 0$ pour les valeurs de ϕ les plus proches de 0 soit: $I = 0$ pour $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) = 0$ soit $\frac{N\phi}{2} = \pm \pi$ ou encore $\phi = \pm \frac{2\pi}{N}$. La largeur d'une frange brillante est donc $\frac{4\pi}{N}$ et la demi largeur d'une frange brillante est $\frac{2\pi}{N}$.

On retrouve bien que plus N est grand plus l'intensité des franges brillantes est grande et plus les franges brillantes sont fines.

8. On lit la valeur de l'intensité maximale $I = 36 = N^2 I_0$ avec ici $A_0 = 1$ donc $I_0 = 1$ soit $N = 6$.

On mesure la largeur d'une frange brillante: $\Delta\phi \approx 2 \text{ rad} = \frac{4\pi}{N}$ donc $N = \frac{4\pi}{2} = 6, 2$: on retrouve $N = 6$.