Lycée Dumont D'Urville

Complément chap Th3: remarques pour les exercices

I. Remarque concernant le calcul de ϕ en régime stationnaire

1. Exemple

On étudie la diffusion de particules avec $n = n(r)$ et $\overrightarrow{j_D} = j_D(r)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques.

On note $\phi(r)$ le flux de particules sortant d'un cylindre de rayon r et de hauteur h.

Exprimer $\phi(r)$ en fonction de D, n, r et h.



$\vec{j}_D = j_D(r)\vec{e}_r$

$\vec{u} = +\vec{e}_r$ dirigé vers l'extérieur pour calculer le flux sortant

$\phi(r) = \iint \vec{j}_D \, dS \, \vec{u} = \iint j_D(r)\vec{e}_r \, dS \, \vec{e}_r$

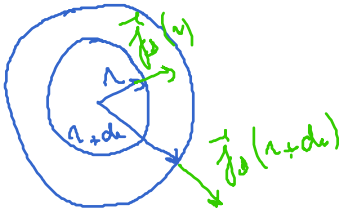
$= \iint j_D(r) \, dS = j_D(r) \iint dS = j_D(r) \, 2\pi r h$

$j_D(r)$ est cste sur la surface latérale du cylindre

loi de Fick : $j_D = -D\frac{dn}{dr}$ donc $\phi(r) = -D\frac{dn}{dr} 2\pi r h$

Montrer que ϕ ne dépend pas de r.

On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$:



En régime stationnaire le nbre de particules dans le système est constant donc le nbre de particules qui entrent entre t et $t+dt$ ($\delta N_e = \phi(r)\,dt$) est égal au nbre de particules qui sortent ($\delta N_s = \phi(r+dr)\,dt$) d'où $\phi(r) = \phi(r+dr)$ donc ϕ ne dépend pas de r

On donne les conditions aux limites $n(r = R_1) = n_1$ et $n(r = R_2) = n_2$, exprimer ϕ en fonction de n_1, n_2, R_1, R_2 et D.

$\phi = -D\frac{dn}{dr} 2\pi r h = \text{cste}$ ♥

On sépare les variables r et n et on intègre entre $r = R_1$ et $r = R_2$

$-2\pi h \int_{n(r=R_1)}^{n(r=R_2)} dn = \phi \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{dr}{r}$

soit $-2\pi h (n_2 - n_1) = \phi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

soit $\boxed{\phi = \dfrac{2\pi h (n_1 - n_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$

Rq : $n_1 > n_2$: les particules diffusent selon $+\vec{e}_r$: $j_D > 0$ et $\phi > 0$

2. Entraînez vous

On étudie la diffusion de particules avec $n = n(r)$ et $\overrightarrow{j_D} = j_D(r)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques.

On note $\phi(r)$ le flux de particules sortant d'une sphère de rayon r.

Exprimer $\phi(r)$ en fonction de D, n et r.

Montrer que ϕ ne dépend pas de r.

On donne les conditions aux limites $n(r = R_1) = n_1$ et $n(r = R_2) = n_2$, exprimer ϕ en fonction de n_1, n_2, R_1, R_2 et D.

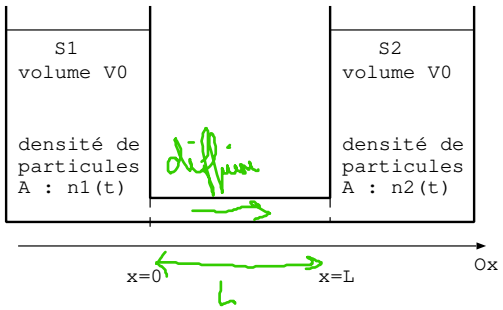
Réponses: $\phi(r) = -D\dfrac{dn}{dr}4\pi r^2$ *et* $\phi = \dfrac{4\pi D(n_1 - n_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}$.

noté ARQS

II. **Remarque concernant le régime quasi-stationnaire**

Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, on suppose que la source du phénomène diffusif évolue de façon beaucoup plus lente que la durée d'établissement d'un régime stationnaire de la grandeur qui diffuse.

Exemple 1: on donne pour conditions initiales $n_1(t=0) = n$ et $n_2(t=0) = 0$.



Il y a diffusion de particules dans le tube des fortes densités (dans S_1) vers les faibles densités (dans S_2) soit $\vec{j}_D$ selon $+Ox$

Au cours du temps $n_1(t)\downarrow$ et $n_2(t)\uparrow$, la diffusion cesse quand $n_1(t_\infty) = n_2(t_\infty)$

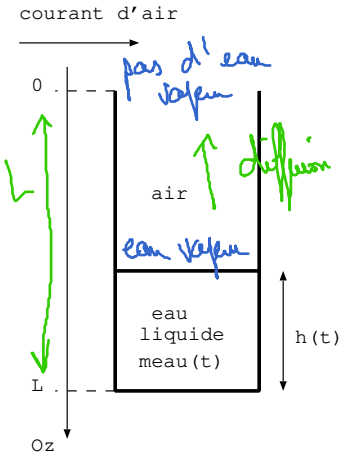
On trouve donc le temps d'évolution de la source du phénomène de diffusion en résolvant $n_1(t_\infty) = n_2(t_\infty)$: ce temps est t_∞.

Le temps de diffusion se déduit de l'éq. de diffusion : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$ // $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$

soit $\frac{n}{\tau_{diff}} = D \frac{n}{L^2} \Rightarrow \tau_{diff} = \frac{L^2}{D}$

On a un régime quasi-stationnaire si $\boxed{\tau_{diff} \ll t_\infty}$

Exemple 2:



Les molécules d'eau vapeur diffusent des fortes vers les faibles densités soit vers le haut : $\vec{j}_D$ selon $(-Oz)$

La diffusion cesse lorsqu'il n'y a plus d'eau en bas.

le temps de diffusion se déduit de l'éq. de diffusion :

$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$ soit $\frac{n}{\tau_{diff}} = D \frac{n}{L^2}$ donc $\boxed{\tau_{diff} = \frac{L^2}{D}}$

On trouve le temps t_∞ pour lequel la diffusion s'arrête en résolvant $m_{eau}(t_\infty) = 0$

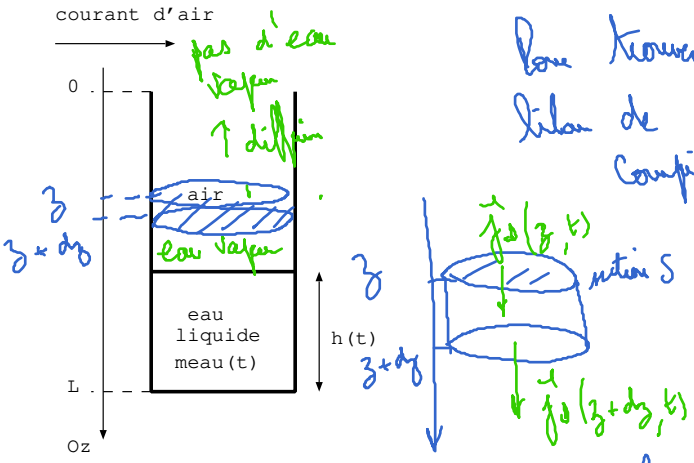
L'hypothèse des régimes quasi-stationnaires est valable si $\boxed{\tau_{diff} \ll t_\infty}$

III. **Remarque concernant les bilans de matière**

Dans les exercices, vous serez amené à écrire des bilans de matière à différents systèmes:

- un bilan de matière à un **système élémentaire** pour déterminer l'expression de j_D, de ϕ et de n
- un bilan de matière au système qui a perdu de la matière par diffusion et/ou au système qui a gagné de la matière par diffusion.

Exemple:



Pour trouver l'éq. de diffusion, on applique un bilan de matière au système élémentaire de section S compris entre z et z + dz

$\delta N_e = \delta N_s$

$j_D(z,t)\, S\, dt = j_D(z+dz,t)\, S\, dt$

j_D ne dépend pas de z

loi de Fick : $j_D = -D\frac{dn}{dz} = cte \Rightarrow \frac{dn}{dz} = A$

$n(z,t) = Az + B$ C.L. $n(z=0) = 0 = B$

$n(z=h) = n_s = Ah(t) + B$

Pour trouver l'éq. vérifiée par h(t), on applique un bilan de matière à l'eau liquide :

$n_{eau}(t+dt) = n_{eau}(t) - \delta n_{evaporé}$

et $\delta n_{evaporé}$ = nbre de particules d'eau qui traversent la section S en z = h entre t et t + dt × masse d'une molécule d'eau

$= j_D(z=h)\, S\, dt \times \frac{M_{eau}}{N_a}$