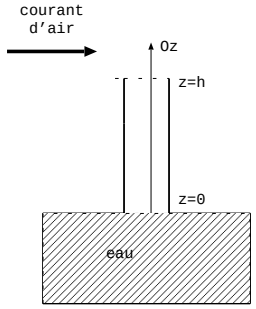
DM 4 de physique

I. **Mesure du coefficient de diffusion**

Un long tube vertical ouvert aux deux extrémités, de section S, est maintenu sur une cuve à eau (fermée) à température constante T. L'extrémité supérieure du tube est à la hauteur h au-dessus de la surface libre de l'eau. Lors de l'évaporation de l'eau, un courant d'air entretenu au dessus du tube permet d'établir dans le tube un régime stationnaire de diffusion de la vapeur d'eau dont on désigne par D le coefficient de diffusion dans l'air. Cette expérience permet de mesurer D.



On note $\overrightarrow{j} = j(z)\overrightarrow{e_z}$, le vecteur densité de courant et $n^* = n^*(z)$ la densité particulaire.
Données: $R = 8,31\ SI$ et $\mathcal{N}_a = 6,0.10^{23}\ mol^{-1}$.

1. Ecrire la loi de Fick et expliquer à l'aide de cette loi cette expérience.

2. A la température T (constante) de l'expérience, la pression de vapeur saturante de l'eau est P_s (c'est la pression d'équilibre liquide-vapeur). En supposant qu'en $z = 0$ l'eau liquide est à l'équilibre avec sa vapeur, exprimer $n^*(z = 0)$ en fonction de P_s, R, $\mathcal{N}_a$ et T.

Le courant d'air maintenu au dessus du tube permet d'éliminer complètement l'eau évaporée au sommet du tube tout en maintenant l'état stationnaire soit $n^*(z = h) = 0$.

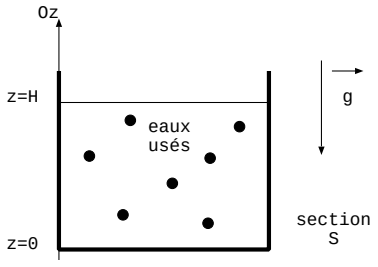
3. Un régime permanent s'établit dans le tube. Montrer, par un bilan de matière sur un système bien choisi que j ne dépend pas de z et en déduire l'expression de $n^*(z)$ dans le tube.

4. Exprimer $j(z)$ et le nombre δN de molécules d'eau qui s'évaporent pendant l'intervalle de temps dt.

5. On pose l'ensemble du dispositif sur une balance et on mesure l'évolution de la masse avec le temps. On note $\frac{dm}{dt}$ la perte de masse par unité de temps. Exprimer D en fonction de h, R, T, $\frac{dm}{dt}$, P_s, S et $M(H_2O)$.
AN: calculer D pour $M(H_2O) = 18\ g.mol^{-1}$, $T = 300\ K$, $P_s = 5,07.10^3\ Pa$, $h = 0,72\ m$, $S = 10\ cm^2$, $\frac{dm}{dt} = 4,0\ mg.h^{-1}$.

II. **Sédimentation**

On étudie la sédimentation dans le bac de prétraitement des eaux usées (dessablage - déshuilage) de hauteur d'eau H et de section S. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon r et de masse volumique ρ_s. On note $d = \frac{\rho_s}{\rho_e}$ leur densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\overrightarrow{v} = -v(t)\overrightarrow{e_z}$.



1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur une particule sphérique dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen. On suppose que la force de frottement exercée sur une particule sphérique s'écrit $\overrightarrow{f} = -6\pi r\eta\overrightarrow{v}$ où η est la viscosité du fluide.

Les particules ont un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_l} = -v_l\overrightarrow{e_z}$. Montrer que v_l s'écrit $v_l = \frac{2gr^2\rho_e(d-1)}{9\eta}$. A quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

2. Le temps de chute t_c, des particules dans le bac de hauteur H, ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale r_{min} des particules solides éliminées dans le dessableur. Données: $H = 2,0\ m$, $\frac{\eta}{\rho_e} = 1,0.10^{-6}\ SI$, $d = 2,65$, $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

On donne la taille typique de différentes particules. Préciser celles qui peuvent atteindre le fond du bac.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile
rayon r	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm

On note $n(z,t)$ la densité volumique de particules la densité de particules dans le bac décanteur de hauteur H et de section S.

3. Exprimer, en fonction de v_l notamment, le vecteur densité de courant de particules, noté $\overrightarrow{j_c}(z,t)$, associé à la convection créée par la gravité.

4. Justifier la présence d'un courant de diffusion noté $\overrightarrow{j_D}(z,t)$. On note D le coefficient de diffusion des particules dans l'eau. Déduire de la loi de Fick, l'expression de $\overrightarrow{j_D}(z,t)$.

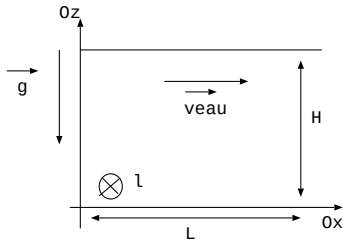
Le vecteur densité de courant de particules résultant est donc $\overrightarrow{j}(z,t) = \overrightarrow{j_c}(z,t) + \overrightarrow{j_D}(z,t)$.

5. On cherche le profil de concentration $n(z)$ en régime stationnaire. Que dire du vecteur $\overrightarrow{j}$ en régime stationnaire?

Au fond du bassin, la densité de particules sphériques est notée n_0. Montrer que $n(z) = n_0 e^{-z/\delta}$. Exprimer δ en fonction de v_l et D.

6. La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement η: $D = \dfrac{k_B T}{6\pi\eta r}$. Calculer δ pour une température $T = 300\ K$ et des particules de limon. Donnée: $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$. Préciser l'unité de δ et conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

7. Les particules traversent maintenant un dessableur longitudinal qui est un bac de profondeur $H = 2\ m$, de longueur L et de largeur $l = L/6$. Les eaux usées traversent le bac dessableur avec une vitesse $\overrightarrow{v}_{eau} = v_{eau}\overrightarrow{e_x}$. Le débit volumique d'eau est est $D_v = 20\ L.s^{-1}$. On donne la relation $D_v = v_{eau}S$ où S est la surface du bassin perpendiculaire à la vitesse de l'eau.



7.a. Exprimer, en fonction de D_v, H et L, la vitesse v_{eau} et le temps δt mis par l'eau pour traverser le dessableur.

7.b. Les particules en suspension dans le dessableur sont entraînées par l'eau à la vitesse $\overrightarrow{v}_{eau} = v_{eau}\overrightarrow{e_x}$ et par la gravité à la vitesse de norme $\overrightarrow{v_l}$. Quelle est la forme de la trajectoire des particules solides dans le référentiel du sol ? Quelle relation doit exister entre t_c et δt pour que toutes les particules de rayon supérieur à $r_{min} = 8,8\ \mu m$ sédimentent ? Déterminer numériquement la longueur minimale L_{min} du bac dessableur.