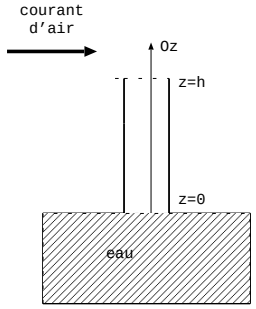
DM 4 de physique

I. **Mesure du coefficient de diffusion**

Un long tube vertical ouvert aux deux extrémités, de section S, est maintenu sur une cuve à eau (fermée) à température constante T. L'extrémité supérieure du tube est à la hauteur h au-dessus de la surface libre de l'eau. Lors de l'évaporation de l'eau, un courant d'air entretenu au dessus du tube permet d'établir dans le tube un régime stationnaire de diffusion de la vapeur d'eau dont on désigne par D le coefficient de diffusion dans l'air. Cette expérience permet de mesurer D.



On note $\overrightarrow{j} = j(z)\overrightarrow{e_z}$, le vecteur densité de courant et $n^* = n^*(z)$ la densité particulaire.
Données: $R = 8,31\ SI$ et $\mathcal{N}_a = 6,0.10^{23}\ mol^{-1}$.

1. Ecrire la loi de Fick et expliquer à l'aide de cette loi cette expérience.

2. A la température T (constante) de l'expérience, la pression de vapeur saturante de l'eau est P_s (c'est la pression d'équilibre liquide-vapeur). En supposant qu'en $z = 0$ l'eau liquide est à l'équilibre avec sa vapeur, exprimer $n^*(z = 0)$ en fonction de P_s, R, $\mathcal{N}_a$ et T.

Le courant d'air maintenu au dessus du tube permet d'éliminer complètement l'eau évaporée au sommet du tube tout en maintenant l'état stationnaire soit $n^*(z = h) = 0$.

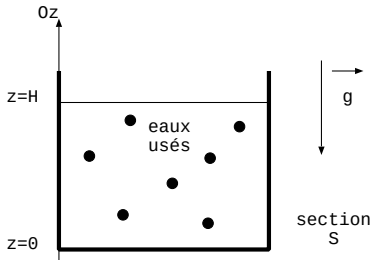
3. Un régime permanent s'établit dans le tube. Montrer, par un bilan de matière sur un système bien choisi que j ne dépend pas de z et en déduire l'expression de $n^*(z)$ dans le tube.

4. Exprimer $j(z)$ et le nombre δN de molécules d'eau qui s'évaporent pendant l'intervalle de temps dt.

5. On pose l'ensemble du dispositif sur une balance et on mesure l'évolution de la masse avec le temps. On note $\dfrac{dm}{dt}$ la perte de masse par unité de temps. Exprimer D en fonction de h, R, T, $\dfrac{dm}{dt}$, P_s, S et $M(H_2O)$.
AN: calculer D pour $M(H_2O) = 18\ g.mol^{-1}$, $T = 300\ K$, $P_s = 5,07.10^3\ Pa$, $h = 0,72\ m$, $S = 10\ cm^2$, $\dfrac{dm}{dt} = 4,0\ mg.h^{-1}$.

II. **Sédimentation**

On étudie la sédimentation dans le bac de prétraitement des eaux usées (dessablage - déshuilage) de hauteur d'eau H et de section S. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon r et de masse volumique ρ_s. On note $d = \dfrac{\rho_s}{\rho_e}$ leur densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\overrightarrow{v} = -v(t)\overrightarrow{e_z}$.



1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur une particule sphérique dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen. On suppose que la force de frottement exercée sur une particule sphérique s'écrit $\overrightarrow{f} = -6\pi r\eta\overrightarrow{v}$ où η est la viscosité du fluide.

Les particules ont un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_l} = -v_l\overrightarrow{e_z}$. Montrer que v_l s'écrit $v_l = \dfrac{2gr^2\rho_e(d-1)}{9\eta}$. A quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

2. Le temps de chute t_c, des particules dans le bac de hauteur H, ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale r_{min} des particules solides éliminées dans le dessableur. Données: $H = 2,0\ m$, $\dfrac{\eta}{\rho_e} = 1,0.10^{-6}\ SI$, $d = 2,65$, $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

On donne la taille typique de différentes particules. Préciser celles qui peuvent atteindre le fond du bac.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile
rayon r	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm

On note $n(z,t)$ la densité volumique de particules la densité de particules dans le bac décanteur de hauteur H et de section S.

3. Exprimer, en fonction de v_l notamment, le vecteur densité de courant de particules, noté $\overrightarrow{j_c}(z,t)$, associé à la convection créée par la gravité.

4. Justifier la présence d'un courant de diffusion noté $\overrightarrow{j_D}(z,t)$. On note D le coefficient de diffusion des particules dans l'eau. Déduire de la loi de Fick, l'expression de $\overrightarrow{j_D}(z,t)$.

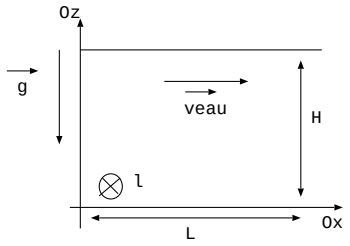
Le vecteur densité de courant de particules résultant est donc $\overrightarrow{j}(z,t) = \overrightarrow{j_c}(z,t) + \overrightarrow{j_D}(z,t)$.

5. On cherche le profil de concentration $n(z)$ en régime stationnaire. Que dire du vecteur $\overrightarrow{j}$ en régime stationnaire?

Au fond du bassin, la densité de particules sphériques est notée n_0. Montrer que $n(z) = n_0 e^{-z/\delta}$. Exprimer δ en fonction de v_l et D.

6. La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement η: $D = \dfrac{k_B T}{6\pi\eta r}$. Calculer δ pour une température $T = 300\ K$ et des particules de limon. Donnée: $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$. Préciser l'unité de δ et conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

7. Les particules traversent maintenant un dessableur longitudinal qui est un bac de profondeur $H = 2\ m$, de longueur L et de largeur $l = L/6$. Les eaux usées traversent le bac dessableur avec une vitesse $\overrightarrow{v}_{eau} = v_{eau}\overrightarrow{e_x}$. Le débit volumique d'eau est est $D_v = 20\ L.s^{-1}$. On donne la relation $D_v = v_{eau}S$ où S est la surface du bassin perpendiculaire à la vitesse de l'eau.



7.a. Exprimer, en fonction de D_v, H et L, la vitesse v_{eau} et le temps δt mis par l'eau pour traverser le dessableur.

7.b. Les particules en suspension dans le dessableur sont entraînées par l'eau à la vitesse $\overrightarrow{v}_{eau} = v_{eau}\overrightarrow{e_x}$ et par la gravité à la vitesse de norme $\overrightarrow{v_l}$. Quelle est la forme de la trajectoire des particules solides dans le référentiel du sol ? Quelle relation doit exister entre t_c et δt pour que toutes les particules de rayon supérieur à $r_{min} = 8,8\ \mu m$ sédimentent ? Déterminer numériquement la longueur minimale L_{min} du bac dessableur.

Correction DM 4

III. **Mesure du coefficient de diffusion**

1. La loi de Fick en vecteur s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{\text{grad}}n = -D\dfrac{dn^*}{dz}\overrightarrow{e_z}$ et en scalaire $j_D = -D\dfrac{dn^*}{dz}$. Elle traduit le fait que la diffusion se produit des fortes concentrations vers les faibles concentrations.

Ici la concentration de l'air en molécules d'eau est nulle en haut du tube puisque le courant d'air chasse les molécules et la concentration de l'air en molécules d'eau est grande en bas du tube puisqu'il y a de l'eau qui s'évapore. Donc les molécules d'eau diffusent des fortes vers les faibles concentrations soit du bas vers le haut du tube. Le courant d'air permet de maintenir une pression nulle en haut du tube, le récipient d'eau permet de maintenir le phénomène d'évaporation donc on est en régime stationnaire.

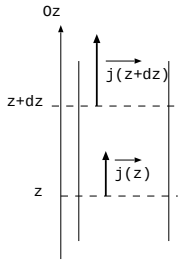
2. La loi des GP s'écrit $PV = nRT$ où n désigne le nombre de moles. Par définition la densité particulaire est $n^* = \dfrac{N}{V}$ où N est le nombre de particules.

On a aussi la relation $N = n\mathcal{N}_a$ soit $N = \dfrac{PV\mathcal{N}_a}{RT}$ soit $n^* = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P\mathcal{N}_a}{RT}$. d'où $n^*(z=0) = \dfrac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}$ (en $z = 0$, l'eau vapeur est en équilibre avec l'eau liquide, la pression de l'eau est égale à sa pression de vapeur saturante).

3. On considère le système infinitésimal de section S compris entre z et $z + dz$.

Le nombre de molécules d'eau qui entrent dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta N_e = j(z)Sdt$.

Le nombre de molécules d'eau qui sortent du système entre t et $t + dt$ est $\delta N_s = j(z + dz)Sdt$.



En régime stationnaire, le nombre de molécules dans le système est constant donc le nombre de molécules qui entrent est égal au nombre de molécules qui sortent soit $j(z) = j(z + dz)$ donc j est une constante.

Or d'après la loi de Fick $j = -D\dfrac{dn^*}{dz}$ est une constante donc $n^*(z) = Az + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites $n^*(z=0) = \dfrac{P_s\mathcal{N}_a}{RT} = B$ et $n^*(z=h) = 0 = Ah + B$. On en déduit $n^*(z) = \dfrac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}(1 - \dfrac{z}{h})$.

4. La loi de Fick $j = -D\dfrac{dn^*}{dz} = \dfrac{P_s\mathcal{N}_aD}{RTh} > 0$: la diffusion se fait bien de l'eau vers l'air car elle se fait des fortes densités en vapeur d'eau vers les faibles densités en vapeur d'eau.

Le nombre de molécules d'eau qui s'évaporent est égal au nombre de molécules d'eau qui traversent la section S en $z = 0$ on a donc $\delta N = j(z=0)Sdt$ soit $\dfrac{\delta N_v}{dt} = \dfrac{P_s\mathcal{N}_aDS}{RTh}$.

5. La masse d'une molécule d'eau est $\dfrac{M(H_2O)}{\mathcal{N}_a}$ donc la masse d'eau qui s'évapore par unité de temps est égale au nombre de molécules d'eau qui s'évaporent par unité de temps multiplié par la masse d'une molécule d'eau soit: $\dfrac{\delta m_v}{dt} = \delta N\dfrac{M(H_2O)}{\mathcal{N}_a} = \dfrac{P_s\mathcal{N}_aDSM(H_2O)}{RTh\mathcal{N}_a} = \dfrac{P_sDSM(H_2O)}{RTha}$.

On écrit la conservation de la masse appliquée au système entier (tube + eau liquide): $m(t + dt) - m(t) = -\delta m_v dt$ soit avec dt petit $\dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{P_sDSM(H_2O)}{RTha}$.

On en déduit $D = -\dfrac{dm}{dt}\dfrac{RTh}{P_sSM(H_2O)} = \dfrac{4.10^{-6}}{3600}\dfrac{8,3.300.0,72}{5,07.10^3.10.10^{-4}.18.10^{-3}} = 2.10^{-5}\ m^2s^{-1}$ c'est le bon ordre de grandeur pour la diffusion dans un gaz.

IV. **Sédimentation**

1. Une particule, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, subit:

- son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -\rho_s\dfrac{4\pi r^3}{3}g\overrightarrow{e_z}$

- la poussée d'Archimède (force verticale ascendante égale au poids de volume de fluide déplacé) $\overrightarrow{F_a} = +\rho_l \frac{4\pi r^3}{3} g\overrightarrow{e_z}$

- la force de frottements de l'eau $\overrightarrow{f} = -6\pi r\eta v\overrightarrow{e_z} = +6\pi r\eta v\overrightarrow{e_z}$.

Lorsque les particules atteignent leur vitesse limite, elles ont un mouvement rectiligne uniforme et la somme des forces est nulle: $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$

En projection sur Oz: $-\rho_s \frac{4\pi r^3}{3} g + \rho_l \frac{4\pi r^3}{3} g + 6\pi r\eta v_l = 0$ avec $\rho_s = d\rho_e$ soit $v_l = \frac{2r^2\rho_e(d-1)g}{9\eta}$.

Pour $d > 1$, on a $v_l > 0$ donc les particules tombent et la sédimentation se produit (la vitesse est définie par $\overrightarrow{v} = -v\overrightarrow{e_z}$, donc $v > 0$ signifie que la vitesse est selon $-Oz$).

Pour $d < 1$, on a $v_l < 0$ donc les particules remontent à la surface.

2. Le temps mis par les particules pour atteindre le fond du bac est $t_c = \frac{H}{v_l} = \frac{9\eta H}{2gr^2\rho_e(d-1)}$. Pour que les particules atteignent le fond, il faut que le temps de chute soit inférieur à $t_l = 2\ h$ soit $t_c = \frac{H}{v_l} = \frac{9\eta H}{2gr^2\rho_e(d-1)} < t_l$ impose $r > \sqrt{\frac{9\eta H}{2g\rho_e(d-1)t_l}} = 8,8\ \mu m$.

Le sable grossier et fin, ainsi que le limon peuvent donc sédimenter.

3. Le vecteur courant de déplacement de particules associé à la convection s'écrit $\overrightarrow{j_c} = n\overrightarrow{v_l} = -nv_l\overrightarrow{e_z}$.

4. Les particules s'accumulent au fond du bassin sous l'effet de la gravité, la densité de particules n'est donc pas homogène, il y a diffusion de particules des fortes vers les faibles densités, c'est se que traduit la loi de Fick qui s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{grad}n = -D\frac{\partial n}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

5. En régime stationnaire, le courant ascendant de particules (lié à la diffusion) compense le courant descendant de particules (lié à la convection). On a donc $\overrightarrow{j} = -(nv_l + D\frac{dn}{dz})\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$ soit $\frac{dn}{dz} + \frac{v_l}{D}n = 0$.

La solution de cette équation différentielle s'écrit $n(z) = Ae^{-z/\delta}$ avec $\delta = \frac{D}{v_l}$.

On applique la condition aux limites donnée par l'énoncé:

Au fond du bassin $n(z = 0) = n_0 = A$ soit $n(z) = n_0 e^{-z/\delta}$.

6. AN pour $r = 10\ \mu m$ (limon): $D = 2,2.10^{-14}\ m^2.s^{-1}$, $v_l = 3,6.10^{-4}\ m.s^{-1}$ et $\delta = 6,1.10^{-11}\ m$: c'est une distance.

La densité de particules est homogène sur une épaisseur de l'ordre de 5δ donc toutes les particules sont accumulées au fond du bassin, la diffusion n'est pas du tout efficace.

7. **7.a.** La surface du bassin perpendiculaire à la vitesse de l'eau est $S = Hl = \frac{HL}{6}$ donc la vitesse de l'eau est $v_{eau} = \frac{D_v}{S} = \frac{6D_v}{HL}$.

Le temps mis par l'eau pour traverser le bassin est $\delta t = \frac{L}{v_{eau}} = \frac{HL^2}{6D_v}$.

7.b. Par rapport au sol, les particules décrivent une droite à la vitesse $v_{eau}\overrightarrow{e_x} - v_l\overrightarrow{e_z}$.

Les particules sédimentent à condition qu'elles soient tombées au fond du bassin avant de l'avoir traversé soit à condition que $t_c < \delta t$. Ce qui impose $t_c < \frac{HL^2}{6D_v}$ soit $L > \sqrt{\frac{6D_v t_c}{H}}\sqrt{\frac{6D_v}{v_l}} = \sqrt{\frac{27D_v\eta}{\rho_e g(d-1)r^2}} = L_{min}$.

AN pour $r = 8,8\ \mu m$: $L_{min} = 21\ m$.