

Révisions PCSI

Bonjour à toutes et à tous, et bienvenue en classe préparatoire PCSI au lycée Jean Jaurès.

Avant de penser aux révisions, je vous conseille **très fortement de vous reposer pendant tout le mois de juillet**. La première année de CPGE est intense et exigeante ; il est donc préférable d'arriver à la rentrée en pleine forme.

Ceci étant dit, à l'approche de la rentrée, il est souhaitable de remettre progressivement la machine intellectuelle en marche. Pour cela, quelques révisions du programme de terminale sont nécessaires. Cela signifie également qu'**il est inutile de chercher à prendre de l'avance sur le programme de physique de PCSI** : maîtriser les fondamentaux du lycée sera bien plus profitable.

Avant de réviser la physique, je vous recommande de revoir les bases de mathématiques, en particulier les outils liés à l'étude des fonctions. Il s'agit notamment des notions suivantes : étude de fonctions, dérivation, intégration, représentation graphique et résolution des équations différentielles les plus simples.

Nous commencerons l'année par le chapitre d'optique géométrique. Nous utiliserons très souvent les fonctions trigonométriques ; il est donc indispensable d'être parfaitement à l'aise avec elles. Nous étudierons ensuite les ondes, un domaine qui fait également un large usage de la trigonométrie. Une raison supplémentaire de consolider ces notions avant la rentrée.

Vous trouverez dans la suite de ce document quelques exercices de base à faire afin d'aborder sereinement cette nouvelle année. Le premier ensemble d'exercices se concentre sur l'étude de fonctions que nous allons retrouver régulièrement durant l'année. Le deuxième ensemble d'exercices se focalise sur des notions de physique de lycée en lien avec l'optique et la physique des ondes.

Profitez bien de vos vacances, reposez-vous, et je vous dis à très bientôt. J'ai hâte de vous rencontrer et de commencer cette année avec vous.

M.Wierzchalek

I - Étude de fonctions

Exercice 1 – Élongation d'un oscillateur (fonction trigonométrique)

On étudie l'élongation $x(t)$ d'un point matériel accroché à un ressort, repérée à l'instant t (en secondes) par

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où $X_m > 0$, $\omega > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ sont des constantes réelles.

- 1) Justifier que x est une fonction périodique et donner sa période T en fonction de ω .
- 2) Calculer la dérivée $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.
- 3) Déterminer les valeurs de t (sur une période, en fonction de ω et φ) pour lesquelles $\dot{x}(t) = 0$.
- 4) Dresser le tableau de variations de x sur une période. En déduire les valeurs maximale et minimale de $x(t)$, ainsi que les instants où elles sont atteintes.
- 5) On prend maintenant $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Calculer $x(0)$ et $\dot{x}(0)$. En déduire le sens de variation de x au voisinage de $t = 0$ (croissante ou décroissante?).
- 6) Représenter l'allure de $x(t)$ sur un intervalle de longueur $2T$, en faisant apparaître X_m , $-X_m$ et T sur le graphe.

Exercice 2 – Charge d'un condensateur (fonction exponentielle)

Lorsqu'un condensateur initialement déchargé est branché, à l'instant $t = 0$, aux bornes d'un générateur de tension constante E à travers une résistance, la tension $u(t)$ à ses bornes vérifie, pour $t \geq 0$,

$$u(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

où $E > 0$ et $\tau > 0$ (le temps caractéristique, appelé constante de temps) sont des constantes.

- 1) Calculer $u(0)$. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Interpréter physiquement ces deux résultats.
- 2) Calculer la dérivée $\dot{u}(t)$. Étudier son signe sur $[0, +\infty[$ et en déduire le sens de variation de u .
- 3) Montrer que la droite d'équation $y = E$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de u en $+\infty$.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de u au point d'abscisse $t = 0$. Montrer que cette tangente coupe la droite $y = E$ au point d'abscisse $t = \tau$ (c'est ainsi qu'on peut estimer τ graphiquement).
- 5) Calculer $u(\tau)$ en fonction de E (on donnera une valeur numérique approchée du coefficient, sachant que $e^{-1} \approx 0,37$). Que vaut $u(5\tau)$, à 1% de E près?
- 6) Tracer l'allure de $u(t)$ pour $t \geq 0$, en faisant apparaître l'asymptote $y = E$, la tangente à l'origine et le point d'abscisse τ .

Exercice 3 – Énergie potentielle d'interaction (fonction rationnelle)

L'énergie potentielle d'interaction entre deux particules séparées d'une distance $r > 0$ est parfois modélisée par une fonction du type

$$E_p(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$$

où $A > 0$ et $B > 0$ sont des constantes positives.

- 1) Calculer $\lim_{r \rightarrow 0^+} E_p(r)$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} E_p(r)$.
- 2) Calculer la dérivée $E_p'(r)$ et la mettre sous la forme d'une unique fraction.
- 3) Étudier le signe de $E_p'(r)$ sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de E_p . Montrer qu'il existe une unique valeur r_0 (que l'on exprimera en fonction de A et B) pour laquelle E_p admet un minimum.
- 4) Tracer l'allure de $E_p(r)$ pour $r > 0$, en faisant apparaître r_0 et le comportement asymptotique en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4 – Décroissance radioactive ($y' = ay$)

Le nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ présents dans un échantillon à l'instant t vérifie l'équation différentielle

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0 \text{ constante (appelée constante radioactive),}$$

avec la condition initiale $N(0) = N_0$.

- 1) Rappeler la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec $a \in \mathbb{R}$ constante).
- 2) En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t , en utilisant la condition initiale.
- 3) Vérifier, par le calcul, que la fonction trouvée est bien solution de l'équation différentielle.
- 4) On appelle temps de demi-vie $t_{1/2}$ l'instant pour lequel $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$. Montrer que $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Exercice 5 – Charge d'un condensateur, retour sur l'équation différentielle ($y' = ay + b$)

On reprend le circuit RC de l'exercice 2 (résistance R , capacité C , générateur de tension constante E). On admet qu'avant même de connaître la solution, la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{\tau}, \quad \tau = RC,$$

avec la condition initiale $u(0) = 0$ (condensateur initialement déchargé).

- 1) Rappeler la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$).
- 2) Mettre l'équation différentielle vérifiée par u sous cette forme, en identifiant les constantes a et b .
- 3) En déduire l'expression générale de $u(t)$, à une constante K près.
- 4) Déterminer K à l'aide de la condition initiale $u(0) = 0$, puis retrouver l'expression de $u(t)$ obtenue dans l'exercice 2.
- 5) Même question en supposant cette fois que le condensateur est initialement chargé sous une tension $u(0) = u_0$, avec $0 < u_0 < E$. Vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec le cas $u_0 = 0$.

Exercice 6 – Calcul de primitives usuelles

Dans chacun des cas suivants, une grandeur physique est donnée sous forme d'une fonction f dépendant du temps ou de l'espace; déterminer une primitive F de f (on ne cherche pas de constante d'intégration particulière, sauf mention contraire).

- a) La vitesse d'un mobile en chute libre est $v(t) = gt$ (avec g constante). Déterminer une primitive $x(t)$ de $v(t)$ (c'est-à-dire la position, à une constante près).
- b) L'accélération d'un point matériel est $a(t) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t)$ (avec ω, X_m constantes). Déterminer une primitive de $a(t)$.
- c) Le courant dans un circuit est $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ (avec I_0, τ constantes). Déterminer une primitive de $i(t)$ (charge $q(t)$ transportée).
- d) La force exercée par un ressort est $F(x) = -kx$ (avec k constante). Déterminer une primitive de $F(x)$.
- e) Une puissance instantanée s'écrit $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ (avec P_0, ω constantes). Déterminer une primitive de $P(t)$.
- f) Le champ électrique créé par une charge ponctuelle s'écrit, pour $r > 0$, $E(r) = \frac{k}{r^2}$ (avec k constante). Déterminer une primitive de $E(r)$.

II - Quelques exercices de physique

Rappels de cours

Lois de Snell-Descartes. Pour un rayon lumineux arrivant sur un dioptré plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 , avec un angle d'incidence i_1 mesuré par rapport à la normale au dioptré :

- **Réflexion** : le rayon réfléchi reste dans le plan d'incidence, avec un angle de réflexion $i_1' = i_1$.
- **Réfraction** : le rayon réfracté reste dans le plan d'incidence, avec un angle de réfraction i_2 vérifiant $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Relation de conjugaison des lentilles minces (formule de Descartes). Pour une lentille mince de centre optique O et de distance focale image $f' = \overline{OF'}$, un objet ponctuel A sur l'axe optique et son image A' vérifient

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'},$$

les distances étant algébriques (comptées positivement dans le sens de propagation de la lumière). Le grandissement transversal associé est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

(Les exercices proposés n'utilisent que cette formule, avec origine au centre optique O ; les relations de Newton, avec origine aux foyers, ne sont pas nécessaires ici.)

Approximation des petits angles. Pour un angle θ exprimé en radians et petit devant 1, on admettra (sans avoir besoin d'un développement limité) que

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \tan \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Optique géométrique

Exercice 7 – Réfraction et réflexion totale

Un rayon lumineux, se propageant dans l'air (indice $n_1 = 1,00$), arrive à la surface plane d'un liquide d'indice $n_2 = 1,33$, avec un angle d'incidence i_1 mesuré par rapport à la normale à la surface.

- 1) Rappeler la loi de Snell-Descartes relative à la réfraction, reliant n_1 , n_2 , i_1 et l'angle de réfraction i_2 .
- 2) On prend $i_1 = 40^\circ$. Calculer i_2 . Le rayon réfracté se rapproche-t-il ou s'éloigne-t-il de la normale par rapport au rayon incident ? Est-ce cohérent avec le passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent ?
- 3) On envoie maintenant un rayon lumineux depuis le liquide vers l'air (le rayon frappe la surface depuis l'intérieur du liquide, avec un angle d'incidence i_1' mesuré dans le liquide). Rappeler la condition d'existence d'un rayon réfracté dans l'air.
- 4) En déduire l'expression de l'angle limite i_ℓ au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté (réflexion totale), puis calculer sa valeur numérique.

Exercice 8 – Image formée par une lentille mince convergente

Une lentille mince convergente de centre optique O a une distance focale $f' = 5,0$ cm (donc $\overline{OF'} = f'$). Un objet $\overline{AB}$, de hauteur 2,0 cm, est placé perpendiculairement à l'axe optique, avec A sur l'axe, à une distance $\overline{OA} = -20$ cm de la lentille (convention algébrique usuelle, sens de propagation de la lumière positif).

- 1) Rappeler la relation de conjugaison des lentilles minces (formule de Descartes) et la définition du grandissement γ .
- 2) Calculer la position $\overline{OA'}$ de l'image A' à l'aide de la relation de conjugaison.
- 3) Calculer le grandissement γ . En déduire la taille $\overline{A'B'}$ de l'image, ainsi que son sens (droite ou renversée) par rapport à l'objet.

- 4) L'image obtenue est-elle réelle ou virtuelle? Justifier à partir du signe de $\overline{OA'}$.
- 5) On éloigne l'objet à l'infini ($\overline{OA} \rightarrow -\infty$). Où se forme alors l'image? Retrouver ce résultat directement à partir de la définition du foyer image F' .

Ondes

Exercice 11 – Onde progressive sinusoïdale le long d'une corde

Une onde progressive sinusoïdale se propage le long d'une corde tendue, dans le sens des x croissants, à la célérité $c = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La source, en $x = 0$, impose une vibration transversale de fréquence $f = 20 \text{ Hz}$ et d'amplitude $Y_m = 1,5 \text{ cm}$.

- 1) Rappeler la relation entre la longueur d'onde λ , la célérité c et la période temporelle T (ou la fréquence f) de l'onde. Calculer T puis λ .
- 2) Écrire l'expression de l'élongation transversale $y(0, t)$ de la source en fonction de Y_m , f (ou T) et t , en supposant qu'à $t = 0$ la source part de sa position d'équilibre en se déplaçant vers le haut.
- 3) Un point M de la corde, situé à l'abscisse $x_M = 60 \text{ cm}$ de la source, reproduit le même mouvement que la source, mais avec un retard Δt . Exprimer Δt en fonction de x_M et c , puis calculer sa valeur numérique.
- 4) En déduire l'expression de l'élongation $y(x_M, t)$ du point M en fonction de Y_m , T , t et Δt .
- 5) Le point M vibre-t-il en phase, en opposition de phase, ou en quadrature de phase avec la source? (On exprimera le rapport x_M/λ et on discutera son lien avec le déphasage.)

Exercice 13 – Interférences lumineuses : fentes de Young

Une source laser, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633 \text{ nm}$, éclaire deux fentes fines S_1 et S_2 , distantes de $a = 0,50 \text{ mm}$, qui se comportent comme deux sources secondaires cohérentes. On observe la figure d'interférences sur un écran placé parallèlement au plan des fentes, à une distance $D = 2,0 \text{ m}$.

On rappelle que si δ désigne la différence de marche entre les deux rayons issus de S_1 et S_2 qui se recombinaient en un point M de l'écran, alors :

- M correspond à une frange brillante (interférences constructives) si $\delta = k\lambda$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- M correspond à une frange sombre (interférences destructives) si $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On rappelle également que, dans les conditions usuelles de l'expérience ($a \ll D$), l'interfrange (distance entre deux franges brillantes consécutives, ou deux franges sombres consécutives) vaut

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

- 1) Calculer la valeur de l'interfrange i , en mm.
- 2) Une frange brillante est observée au centre de l'écran (point O , à égale distance de S_1 et S_2). Justifier que ce point correspond bien à une frange brillante, en précisant la valeur de δ en ce point.
- 3) Sur l'écran, on observe une zone d'interférences de largeur $L = 3,0 \text{ cm}$, centrée sur le point O . Combien de franges brillantes sont visibles dans cette zone (on inclura la frange centrale)?
- 4) On remplace le laser par une source de longueur d'onde inconnue λ' . On mesure alors un interfrange $i' = 3,2 \text{ mm}$, les distances a et D étant inchangées. En déduire la valeur de λ' , et identifier la couleur de la radiation correspondante (on rappelle que le visible s'étend approximativement de 400 nm à 800 nm , du violet au rouge).
- 5) On remplace maintenant le laser par une lampe à lumière blanche (superposition de toutes les longueurs d'onde du visible). Décrire qualitativement ce que l'on observe au centre de l'écran, puis en s'éloignant du centre. Justifier à partir de l'expression de l'interfrange $i = \lambda D/a$.