

Programme des colles de la semaine du 23 septembre 2024

Quelques types de raisonnement. Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Quelques types de raisonnement

1. Exemples de démonstrations « à la main » d'assertions en « pour tout » ou « il existe ».
2. Implication, condition nécessaire, condition suffisante. Réciproque. Équivalence. Exemples simples de raisonnements par équivalences.
3. Raisonnement par disjonction de cas.
4. Raisonnement par l'absurde.
5. Raisonnement par analyse-synthèse.
6. Raisonnement par récurrence

(a) Formules donnant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n q^k$ (où $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

- (b) Notion de récurrence double, forte, et remarque qu'un choix avisé d'hypothèse de récurrence permet de se ramener à une récurrence simple.

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction.
2. Opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit ; composition.
3. Graphe d'une fonction.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lien entre le graphe de f et celui de $x \mapsto f(x+a)$ et celui de $x \mapsto f(x)+a$, où $a \in \mathbb{R}$. Même chose avec $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou encore $a = -1$.
5. Fonctions paires, fonctions impaires. Exercice : toute fonction se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
6. Fonction périodique. Exercice : si f est T -périodique (où $T \in \mathbb{R}^*$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est (kT) -périodique.
7. Monotonie et stricte monotonie. Composition de fonctions monotones.
8. Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées.
9. Fonction valeur absolue. Les résultats ci-dessous ont été vus en exercice.
 - (a) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}_+, |y| \leq M \iff -M \leq y \leq M$.
 - (b) Pour tous $y, m, M \in \mathbb{R}$, si $m \leq y \leq M$ alors $|y| \leq \max(|m|, |M|)$.
10. Si f est une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} , on a¹ : f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
11. Notion de bijection f d'une partie D_1 de \mathbb{R} dans une partie D_2 de \mathbb{R} . Dans ce cas, définition de la bijection réciproque $f^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$.
12. Rappels sur la dérivation (pas de démonstration pour l'instant)
 - (a) Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée.
 - (b) Dérivée et opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit, quotient, composition.
 - (c) Usage de la dérivée pour déterminer le sens de variation.
 - (d) Dérivée d'une bijection réciproque. Théorème de la bijection.
13. Exemples d'études de fonctions. Études de fonctions pour établir des inégalités.
14. Dérivées successives : notion de dérivée d'ordre k , pour $k \in \mathbb{N}$, classe C^k , classe C^∞ (on se contente des définitions pour l'instant).

Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall t > -1, \ln(1+t) \leq t$.

1. Résultat démontré en cours.

2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
3. Fonctions puissances
 - (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (b) Notion de fonction polynomiale.
 - (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (d) Puissances non nécessairement entières : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
 - Règles de calcul usuelles.
 - Régularité sur \mathbb{R}_+^* , variations, limites, suivant les valeurs de α .
 - Prolongement en 0 quand $\alpha > 0$; dérivabilité et caractère C^1 quand $\alpha \geq 1$.
4. Croissances comparées (en 0 et en $+\infty$); taux d'accroissement pour \ln en 1 et pour \exp en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de $x \mapsto a^x$.