

## Programme des colles de la semaine du 30 septembre 2024

# Fonctions logarithme, exponentielle, puissances. Calculs algébriques

### Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité<sup>1</sup> :  $\forall t > -1, \ln(1+t) \leq t$ .
2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité<sup>1</sup> :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ .
3. Fonctions puissances
  - (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
  - (b) Notion de fonction polynomiale.
  - (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
  - (d) Puissances non nécessairement entières :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ .
    - Règles de calcul usuelles.
    - Régularité sur  $\mathbb{R}_+^*$ , variations, limites, suivant les valeurs de  $\alpha$ .
    - Prolongement en 0 quand  $\alpha > 0$ ; dérivabilité et caractère  $C^1$  quand  $\alpha \geq 1$ .
4. Croissances comparées (en 0 et en  $+\infty$ ) ; taux d'accroissement pour  $\ln$  en 1 et pour  $\exp$  en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de  $x \mapsto a^x$ .

### Calculs algébriques

1. Symbole  $\sum$ 
  - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
  - Relation de Chasles, sommation par paquets
  - Changement d'indice
  - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles<sup>1</sup> :  $\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2, \sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$ , on a<sup>1</sup> :  $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ .
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole  $\prod$  : règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  si  $p \in [0, n]$ , et 0 sinon.
  - Valeur quand  $p = 0, p = 1, p = 2, p = n$ .
  - Symétrie des coefficients binomiaux<sup>1</sup>.
  - Relation<sup>1</sup>  $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$  quand  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .
  - Formule du triangle de Pascal<sup>1</sup>.
  - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton<sup>1</sup>.

### Systemes linéaires

1. Notion de système linéaire.

---

1. Résultat démontré en cours.

2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.