Lycée Honoré de Balzac
PCSI

Novembre 2024

Programme des colles de la semaine du 4 novembre 2024

Trigonométrie. Nombres complexes

Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique. Angles en radians.
2. Définition géométrique de cosinus et sinus. Propriétés usuelles :
   - Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$
   - Parité, périodicité, relations liées au décalage de π ou $\dfrac{\pi}{2}$ de l'angle
   - Angles ayant même cosinus ; même sinus
   - Valeurs classiques
   - Formules d'addition ; formules de duplication.
3. Exemples simples de résolutions d'équations ou d'inéquations trigonométriques en s'appuyant sur la lecture du cercle trigonométrique.
4. Tangente d'un angle. Propriétés usuelles du même type que celles énoncées ci-dessus.
5. Fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$: graphes, dérivées.
6. Relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$.
7. Fonction tangente : ensemble de définition, périodicité, parité, classe C^∞, dérivée, graphe.
8. Fonctions circulaires réciproques
   - Fonction Arcsin : définition, sens de variation, parité, caractère C^∞, dérivée, graphe.
   - Fonction Arccos : définition, sens de variation, caractère C^∞, dérivée, graphe.
   - Fonction Arctan : définition, sens de variation, limites, parité, caractère C^∞, dérivée, graphe.

Trigonométrie hyperbolique

1. Définitions des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.
2. Pour chacune : dérivée, sens de variation, limites, parité, graphe.
3. Relation $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

Nombres complexes

1. Définition des nombres complexes donnés par partie réelle et partie imaginaire. Somme, produit. Énoncé de formules déjà vues sur les nombres réels : somme de termes d'une suite géométrique ; factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^*)$; formule du binôme de Newton.
2. Conjugué d'un nombre complexe ; propriétés usuelles [1] : conjugué, d'une somme, d'un produit, de l'inverse, caractérisation des réels, des imaginaires purs, formules : $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
3. Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
4. Propriétés [1] :
   (a) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
   (b) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = |\overline{z}|$.
   (c) $\forall z \in \mathbb{C},\ |-z| = |z|$.
   (d) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$.
   (e) Le module prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{R}$.
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x| = x$, donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ \big||z|\big| = |z|$.
   (g) $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$.
5. Module d'un produit [1] ou d'un quotient.
6. Inégalité triangulaire et cas d'égalité [1].

1. Résultat démontré en cours.

7. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notation $e^{\mathbf{i}\theta}$.
8. Formules d'Euler[1].
9. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathbf{i}\theta} e^{\mathbf{i}\theta'}$.
10. Formule de Moivre[1].
11. Savoir-faire : linéarisation d'expressions trigonométriques.
12. Savoir-faire : usage de l'angle moitié pour transformer l'expression d'une somme de nombres complexes de module 1.
13. Forme trigonométrique d'un nombre complexe : $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
14. Arguments d'un nombre complexe non nul z ; argument principal (dans $]-\pi, \pi]$) noté $\arg(z)$.
15. Propriétés[1] :
    (a) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$;
    (b) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$;
    (c) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$;
    (d) Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$;
16. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument modulo 2π.
17. Savoir-faire : transformer un expression de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$, avec $a, b, t \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, en une expression de la forme $r\cos(t - \varphi)$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a $a + \mathbf{i}b = re^{\mathbf{i}\varphi}$.
18. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
    (a) Résolution[1] de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
    (b) En notant $\omega = e^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}$, propriétés[1] :
        i. on a : $\omega^n = 1$.
        ii. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$.
        iii. Si $n \geqslant 2$, on a : $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$, autrement dit : $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.
19. (a) Méthode pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe.
    (b) Résolution des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes.
    (c) Relations coefficients-racines[1].
20. Exponentielle complexe
    (a) Définition
    (b) Propriétés[1]
        i. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de $\exp(z)$.
        ii. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
        iii. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
        iv. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - z' = 2i\pi k$.
21. (a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes. Une telle fonction est dérivable si ses parties réelle et imaginaire le sont. Les formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, restent valables (démontré en cours pour le produit ; le reste est laissé en exercice).
    (b) Dérivabilité et dérivée[1] de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$, où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur un intervalle I.
22. Nombres complexes et géométrie plane
    (a) Affixe d'un vecteur
    (b) Interprétation géométrique des transformations $z \longmapsto z + z_0$, $z \longmapsto ze^{\mathbf{i}\theta_0}$, où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
    (c) Si A, B, C D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D :
        — le réel $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$;
        — les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ssi $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
        — les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ssi l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π ssi $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.