Lycée Honoré de Balzac — Décembre 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 9 décembre 2024

Ensembles. Suites numériques (les $9/10^{\mathrm{e}}$ du chapitre)

Ensembles

1. Notion (intuitive) d'ensemble. Notation « $x \in E$ ». Description d'un ensemble au moyen d'accolades. Ensemble vide.
2. Parties d'un ensemble. Inclusion. Modèle de rédaction pour démontrer « à la main » une inclusion ; double inclusion pour montrer une égalité.
3. Ensemble des parties d'un ensemble. Notation $\mathcal{P}(E)$ pour l'ensemble des parties de l'ensemble E.
4. Complémentaire d'une partie d'un ensemble
   — Si A est une partie de E, notation $\overline{A}$ ou A^c pour le complémentaire.
   — Propriétés[1] : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{\overline{A}} = A, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
5. Intersection de deux parties d'un ensemble E ; intersection pour une famille quelconque de parties de E.
   — Notion de parties disjointes.
   — Propriétés usuelles relatives à la manipulation des intersections (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
6. Réunion de deux parties d'un ensemble E ; réunion pour une famille quelconque de parties de E. Propriétés usuelles relatives à la manipulation des réunions (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
7. Propriétés
   (a) Complémentaire d'une intersection de deux parties[1]
   (b) Complémentaire d'une réunion de deux parties[1]
   (c) Distributivité[1] de $\cap$ sur $\cup$
   (d) Distributivité de $\cup$ sur $\cap$
8. Différence $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ de deux parties d'un ensemble.
9. La différence symétrique $A \Delta B$ a été traitée en exemple.
10. Notion de recouvrement disjoint (resp. de partition) d'un ensemble.
11. Produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles E et F.
    — Si A est une partie de E et si B est une partie de F, alors $A \times B \subset E \times F$.
    — Extension à la notion de p-uplet.

Suites numériques

1. Notion de suite numérique. On évoque trois façons de définir une suite : explicitement (avec une formule) ; par une relation de récurrence ; implicitement.
2. Notion de suite extraite.
3. Quelques suites particulières (première partie)
   (a) Suites arithmétiques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
   (b) Suites géométriques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
   (c) Suites arithmético-géométriques. Définition ; méthode pour exprimer le terme général en fonction de l'indice.
4. Majorant, minorant, pour une suite réelle.
   (a) Une suite u est bornée ssi la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.
   (b) La somme et le produit de deux suites bornées donnent des suites bornées[1].
5. Suite croissante, décroissante, monotone.

1. Résultat démontré en cours.

6. Limite finie pour une suite réelle
   (a) Définition (on fait le choix d'inégalités larges pour le jeu avec ε). Reformulations de la forme : pour tout intervalle ouvert contenant ℓ...
   (b) Une suite convergente est bornée [1]. Réciproque fausse.
   (c) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors [1] $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\ell|$. Réciproque fausse.
   (d) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell > 0$, alors [1] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
   (e) Opérations sur les limites finies [1].
   (f) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors [1] le produit $(u_nv_n)_n$ est une suite qui converge vers 0.
   (g) Passage à la limite dans les inégalités larges [1].
   (h) Théorème d'encadrement [1].
7. Limite infinie pour une suite réelle
   (a) Définition.
   (b) Si : $\forall n,\ u_n \leqslant v_n$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$) alors [1] $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$).
8. Récapitulatif des opérations sur les limites finies ou infinies, avec mise en valeur des cas d'indétermination (exemples pour montrer que tous les comportements sont possibles dans ces cas-là).
9. On fait mention d'un théorème qui sera revu dans le chapitre sur la continuité : si f est continue en x_0 et si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, alors $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.
10. Limites et suites extraites
    (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors [1] toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, vers la même limite.
    (b) Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers la même limite ℓ, alors [1] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
11. Théorème de la limite monotone [1].
12. Une suite croissante (resp. décroissante) qui converge est majorée (resp. minorée) par sa limite.
13. Suites adjacentes : définition ; théorème [1] : si deux suites sont adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite.
14. Approximations décimales d'un réel [1]. Conséquence : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
15. Prolongement de la notion de limite finie aux suites de nombres complexes. Récapitulatif rapide des opérations possibles. Caractérisation de l'existence et la valeur d'une limite par usage de la partie réelle et de la partie imaginaire [1].
16. Quelques suites particulières (deuxième partie)
    (a) Existence et valeur éventuelle d'une limite pour une suite géométrique.
    (b) Croissances comparées usuelles
    (c) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : méthode pour exprimer le terme général en fonction de l'indice ; cas des coefficients complexes et cas des coefficients réels.