

Programme des colles de la semaine du 3 février 2025

Limites et continuité. Arithmétique

Limites et continuité

1. Notion de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.
2. Définition d'une limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$, en $+\infty$, en $-\infty$.
3. Unicité de la limite.
4. Continuité en un point ; sur un intervalle.
5. Limite à gauche, limite à droite. Conditions sur les limites à gauche et à droite pour que la limite existe¹.
6. Continuité à gauche, continuité à droite.
7. Prolongement par continuité.
8. Si f admet une limite finie en x_0 , alors¹ f est bornée au voisinage de x_0 .
9. Opérations sur les limites finies : somme¹, produit¹, composition¹. Propriétés correspondantes pour la continuité.
10. Limites infinies. Limite à gauche, limite à droite. Opérations.
11. Composée d'une suite et d'une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite¹.
12. Limites et ordre
 - (a) Passage à la limite dans une inégalité, quand la limite existe.
 - (b) Théorème d'encadrement¹.
 - (c) Si $f \leq g$ et $\lim_{x_0} f = +\infty$ (resp. $\lim_{x_0} f = -\infty$) alors $\lim_{x_0} g = +\infty$ (resp. $\lim_{x_0} g = -\infty$).
13. Théorème de la limite monotone.
14. Théorème des valeurs intermédiaires¹. Corollaire dans le cas d'une fonction strictement monotone.
15. Image d'un segment par une fonction continue (« théorème des bornes atteintes », admis).
16. Théorème de la bijection.
17. Prolongement des définitions et des résultats qui restent valables au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes. Caractérisation de la limite par les parties réelles et imaginaires.

Arithmétique

1. Divisibilité.
2. Théorème de division euclidienne¹.
3. Plus grand diviseur commun de deux entiers non tous les deux nuls : définition comme le plus grand diviseur commun aux deux nombres, au sens de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{Z}$.
4. Propriétés
 - (a) Pour $d \in \mathbb{N}$, on a¹ $d = \text{PGCD}(a, b) \iff \begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall n \in \mathbb{Z}, (n|a \text{ et } n|b) \implies n|d \end{cases}$.
 - (b) Propriétés d'usage, notamment : pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{PGCD}(a, b + ak) = \text{PGCD}(a, b)$.
5. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.
6. Nombres premiers entre eux.
7. Le théorème de Bézout a été vu en exercice (version « théorique » et version algorithmique), et le lemme de Gauss en a été déduit.
8. Plus petit multiple commun de deux entiers non nuls. Propriétés usuelles.
9. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = |ab|$. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PPCM}(a, b) = |ab|$.
10. Nombres premiers
 - (a) Définition

1. Résultat démontré en cours.

- (b) Pratique du crible d'Ératosthène sur les premières valeurs
 - (c) Si un nombre premier p ne divise pas un entier a , alors ¹ p est premier avec a .
 - (d) Si p divise ab , alors p divise a ou p divise b .
 - (e) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier ¹.
 - (f) L'ensemble des nombres premiers est infini ¹.
- 11. Théorème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
 - 12. Conséquence pour la description de tous les diviseurs d'un entier.
 - 13. Conséquence pour le calcul du PGCD et le PPCM de deux entiers non nuls, à l'aide des décompositions de l'un et de l'autre.
 - 14. Nombres rationnels et nombres irrationnels.
 - (a) Forme irréductible d'une fraction.
 - (b) Stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme, produit et passage à l'inverse.
 - (c) Nombres décimaux.