

Programme des colles de la semaine du 31 mars 2025

Analyse asymptotique

1. Relations de comparaison : cas des fonctions

- (a) Fonction négligeable devant une autre, au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « o »
 - ii. Règles de calcul usuelles.
 - iii. Croissances comparées des fonctions usuelles.
 - iv. Équivalence entre continuité en un point et développement limité à l'ordre 0 en ce point.
 - v. Équivalence entre dérivabilité en un point et développement limité à l'ordre 1 en ce point ¹.
- (b) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « $\sim$ »
 - ii. Règles de calcul usuelles.
 - iii. Obtention d'un équivalent par encadrement ¹
- (c) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « O »
 - ii. Règles de calcul usuelles.

2. Développements limités

- (a) Définition
- (b) Unicité des coefficients dans un développement limité ¹
- (c) Troncature d'un développement limité
- (d) Développement limité d'une combinaison linéaire
- (e) Développement limité d'un produit
- (f) Développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ¹.
- (g) Primitivation d'un développement limité pour une fonction continue.
- (h) Formule de Taylor Young : si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , et on a la formule de Taylor-Young.
- (i) Développements limités usuels : au voisinage de 0, développement limité à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\cos$, $\sin$, Arctan , ch , sh . Développement limité de $\tan$ à l'ordre 3 en 0. Ces développements ont été exprimés avec un reste en o ; on a indiqué en remarque la possibilité d'exprimer, grâce à l'existence du terme suivant, le reste sous la forme d'un O .
- (j) Exemples de calculs de limites et d'équivalents à l'aide de développements limités.
- (k) Exemple d'étude de la position relative de la courbe d'une fonction et de sa tangente en un point.
- (l) Recherche d'extrema sur un intervalle ouvert : condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique à l'aide du signe de la dérivée seconde.
- (m) Recherche d'asymptote à un graphe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

3. Relations de comparaison : cas des suites. On adapte tous les résultats au cas des suites.

4. Un exemple de développement asymptotique a été traité (méthode pour trouver un développement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^n e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$).

1. Résultat démontré en cours.