Lycée Honoré de Balzac — Avril 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 7 avril 2025

Analyse asymptotique. Espaces vectoriels

Analyse asymptotique

1. Relations de comparaison : cas des fonctions
   (a) Fonction négligeable devant une autre, au voisinage d'un point
      i. Définition. Notation « o »
      ii. Règles de calcul usuelles.
      iii. Croissances comparées des fonctions usuelles.
      iv. Équivalence entre continuité en un point et développement limité à l'ordre 0 en ce point.
      v. Équivalence entre dérivabilité en un point et développement limité à l'ordre 1 en ce point [1].
   (b) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
      i. Définition. Notation « $\sim$ »
      ii. Règles de calcul usuelles.
      iii. Obtention d'un équivalent par encadrement [1]
   (c) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point
      i. Définition. Notation « O »
      ii. Règles de calcul usuelles.
2. Développements limités
   (a) Définition
   (b) Unicité des coefficients dans un développement limité [1]
   (c) Troncature d'un développement limité
   (d) Développement limité d'une combinaison linéaire
   (e) Développement limité d'un produit
   (f) Développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) [1].
   (g) Primitivation d'un développement limité pour une fonction continue.
   (h) Formule de Taylor Young : si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et on a la formule de Taylor-Young.
   (i) Développements limités usuels : au voisinage de 0, développement limité à tout ordre de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0.Ces développements ont été exprimés avec un reste en o ; on a indiqué en remarque la possibilité d'exprimer, grâce à l'existence du terme suivant, le reste sous la forme d'un O.
   (j) Exemples de calculs de limites et d'équivalents à l'aide de développements limités.
   (k) Exemple d'étude de la position relative de la courbe d'une fonction et de sa tangente en un point.
   (l) Recherche d'extrema sur un intervalle ouvert : condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique à l'aide du signe de la dérivée seconde.
   (m) Recherche d'asymptote à un graphe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
3. Relations de comparaison : cas des suites. On adapte tous les résultats au cas des suites.
4. Un exemple de développement asymptotique a été traité (méthode pour trouver un développement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^n e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$).

Espaces vectoriels (1/3 du chapitre)

1. Notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où Ω est un ensemble.

1. Résultat démontré en cours.

3. Combinaison linéaire.
4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est [1] un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. Une intersection de sous-espaces vectoriels est [1] un sous-espace vectoriel.
7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de A sont les colonnes de la forme AX, où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
10. Famille libre.
11. Une famille est liée ssi [1] l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
12. Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre ssi [1] pour tout $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A, on définit $\mathrm{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \ldots, C_p)$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre [1].
15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
16. Composantes d'un vecteur dans une base.
17. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$:
    (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres) ;
    (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations.