

Programme des colles de la semaine du 5 mai 2025

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

1. Notion de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où Ω est un ensemble.
3. Combinaison linéaire.
4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est ¹ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. Une intersection de sous-espaces vectoriels est ¹ un sous-espace vectoriel.
7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\text{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\text{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de A sont les colonnes de la forme AX , où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\text{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
10. Famille libre.
11. Une famille est liée ssi ¹ l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
12. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ssi ¹ pour tout $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A , on définit $\text{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \dots, C_p)$ est libre ssi $\text{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre ¹.
15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
16. Composantes d'un vecteur dans une base.
17. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$:
 - (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres);
 - (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations.
 - (c) exercice-type : extraire une base d'une famille génératrice.
18. Base canonique de $\mathbb{K}^n$; base canonique de $\text{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$; base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
19. Somme de deux sous-espaces vectoriels
 - (a) Définition
 - (b) Famille génératrice de la somme comme concaténation de familles génératrices de chaque espace ¹.
20. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2
 - (a) Définition
 - (b) Caractérisation ¹ par l'unique décomposition du vecteur nul comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2
 - (c) Caractérisation ¹ par $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Dimension finie

21. Un espace est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

¹. Résultat démontré en cours.

22. Théorème de la base incomplète et conséquences : de toute famille génératrice on peut extraire une base; tout espace de dimension finie admet au moins une base; si E est de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base.
23. Si E est de dimension finie et admet une famille génératrice à p éléments, alors toute famille libre de E admet au plus p éléments.
24. Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments¹. On appelle dimension de E ce nombre d'éléments.
25. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
26. Retour sur les ensembles de solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes; des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes. Ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, homogène.
27. Soit E de dimension n .
 - (a) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors $p \leq n$ et on a : $p = n \iff (x_1, \dots, x_p)$ est une base de E .
 - (b) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E , alors $p \geq n$ et on a : $p = n \iff (x_1, \dots, x_p)$ est une base de E .
28. Familles de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$. Retour sur la formule de Taylor pour les polynômes.
29. Si E est de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, on a : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.
30. Définition : hyperplan d'un espace de dimension finie.
31. Définition : rang d'une famille de vecteurs. On remarque que le calcul du rang revient à extraire une base d'une famille génératrice.
32. Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie
 - (a) Si $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de E_1 , $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de E_2 et si E_1 et E_2 sont en somme directe, alors¹ la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de vecteurs de $E_1 \oplus E_2$.
 - (b) Base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.
 - (c) Dimension d'une somme directe.
 - (d) Formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, dans le cas général¹.
 - (e) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire¹.
 - (f) Caractérisations des couples d'espaces supplémentaires à l'aide de la dimension¹.