

Programme des colles de la semaine du 15 septembre 2024

Quelques types de raisonnement. Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle (les 3/4 du chapitre)

Questions de cours

1. Définir la valeur absolue d'un réel ; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$ et en déduire que, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.
3. Donner et démontrer par récurrence la formule permettant le calcul de $\sum_{k=0}^n k$, pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Donner et démontrer par récurrence la formule permettant le calcul de $\sum_{k=0}^n q^k$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
5. Montrer par analyse-synthèse que, pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique couple (f_p, f_i) tel que $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit paire, $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire, et tel que $f = f_p + f_i$.
6. Montrer que si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (d'une variable réelle) T -périodique, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est (kt) -périodique.

Quelques types de raisonnement

1. Exemples de démonstrations « à la main » d'assertions en « pour tout » ou « il existe ».
2. Implication, condition nécessaire, condition suffisante. Réciproque. Équivalence. Exemples simples de raisonnements par équivalences.
3. Raisonnement par disjonction de cas.
4. Valeur absolue d'un réel : définition et premières propriétés (cf. questions de cours). On a vu en exercice que : pour tous $y, m, M \in \mathbb{R}$, si $m \leq y \leq M$ alors $|y| \leq \max(|m|, |M|)$.
5. Raisonnement par l'absurde. On a vu en exercice que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
6. Raisonnement par analyse-synthèse.
7. Raisonnement par récurrence. Notion de récurrence double, forte, et remarque qu'un choix avisé d'hypothèse de récurrence permet de se ramener à une récurrence simple.

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction.
2. Opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit ; composition.
3. Graphe d'une fonction.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lien entre le graphe de f et celui de $x \mapsto f(x + a)$ et celui de $x \mapsto f(x) + a$, où $a \in \mathbb{R}$. Même chose avec $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou encore $a = -1$.
5. Fonctions paires, fonctions impaires.
6. Fonction périodique.
7. Monotonie et stricte monotonie. Composition de fonctions monotones.
8. Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées.
9. Si f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, on a¹ : f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
10. Notion de bijection f d'une partie D_1 de $\mathbb{R}$ dans une partie D_2 de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, définition de la bijection réciproque $f^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$.
11. Rappels sur la dérivation (pas de démonstration pour l'instant)
 - (a) Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée.
 - (b) Dérivée et opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit, quotient, composition.
 - (c) Usage de la dérivée pour déterminer le sens de variation.
12. Exemples d'études de fonctions. Études de fonctions pour établir des inégalités.

1. Résultat démontré en cours.