Lycée Honoré de Balzac — Septembre 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 22 septembre 2025

Quelques types de raisonnement. Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Questions de cours

1. Donner et démontrer par récurrence la formule permettant le calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner et démontrer par récurrence la formule permettant le calcul de $\sum_{k=0}^{n} q^k$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Montrer par analyse-synthèse que, pour toute $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique couple (f_p, f_i) tel que $f_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit paire, $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire, et tel que $f = f_p + f_i$.
4. Démontrer par étude(s) de fonction(s) les inégalités : $\forall t \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$.
5. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.
6. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Quelques types de raisonnement

1. Exemples de démonstrations « à la main » d'assertions en « pour tout » ou « il existe ».
2. Implication, condition nécessaire, condition suffisante. Réciproque. Équivalence. Exemples simples de raisonnements par équivalences.
3. Raisonnement par disjonction de cas.
4. Valeur absolue d'un réel : défnition et premières propriétés (cf. questions de cours). On a vu en exercice que : pour tous $y, m, M \in \mathbb{R}$, si $m \leqslant y \leqslant M$ alors $|y| \leqslant \max(|m|, |M|)$.
5. Raisonnement par l'absurde. On a vu en exercice que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
6. Raisonnement par analyse-synthèse.
7. Raisonnement par récurrence. Notion de récurrence double, forte, et remarque qu'un choix avisé d'hypothèse de récurrence permet de se ramener à une récurrence simple.

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction.
2. Opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit ; composition.
3. Graphe d'une fonction.
4. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lien entre le graphe de f et celui de $x \longmapsto f(x+a)$ et celui de $x \longmapsto f(x) + a$, où $a \in \mathbb{R}$. Même chose avec $x \longmapsto f(ax)$ et $x \longmapsto af(x)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou encore $a = -1$.
5. Fonctions paires, fonctions impaires.
6. Fonction périodique.
7. Monotonie et stricte monotonie. Composition de fonctions monotones.
8. Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées.
9. Si f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, on a[1] : f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
10. Notion de bijection f d'une partie D_1 de $\mathbb{R}$ dans une partie D_2 de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, définition de la bijection réciproque $f^{-1} : D_2 \longrightarrow D_1$.
11. Rappels sur la dérivation (pas de démonstration pour l'instant)
    (a) Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée.
    (b) Dérivée et opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit, quotient, composition.
    (c) Usage de la dérivée pour déterminer le sens de variation.

1. Résultat démontré en cours.

   (d) Dérivée d'une bijection réciproque. Théorème de la bijection.

12. Exemples d'études de fonctions. Études de fonctions pour établir des inégalités.
13. Dérivées successives : notion de dérivée d'ordre k, pour $k \in \mathbb{N}$, classe C^k, classe C^∞ (on se contente des définitions pour l'instant).

Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité[1] : $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leqslant t$.
2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité[1] : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$.
3. Fonctions puissances
   (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
   (b) Notion de fonction polynomiale.
   (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
   (d) Puissances non nécessairement entières : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
      — Règles de calcul usuelles.
      — Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$, variations, limites, suivant les valeurs de α.
      — Prolongement en 0 quand $\alpha > 0$; dérivabilité et caractère C^1 quand $\alpha \geqslant 1$.
4. Croissances comparées (en 0 et en $+\infty$) ; taux d'accroissement pour ln en 1 et pour exp en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de $x \longmapsto a^x$.