Lycée Honoré de Balzac — Septembre 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 29 septembre 2025

Fonctions logarithme, exponentielle, puissances. Calculs algébriques

Questions de cours

1. Démontrer par étude(s) de fonction(s) les inégalités : $\forall t \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$.
2. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.
3. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.
4. Énoncer et démontrer la formule permettant la factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$, pour $a,b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal. La démonstration se fera au moins dans le cas où les formules « avec factorielles » s'appliquent.
6. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité [1] : $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leqslant t$.
2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité [1] : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$.
3. Fonctions puissances
   (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
   (b) Notion de fonction polynomiale.
   (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
   (d) Puissances non nécessairement entières : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
      — Règles de calcul usuelles.
      — Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$, variations, limites, suivant les valeurs de α.
      — Prolongement en 0 quand $\alpha > 0$; dérivabilité et caractère C^1 quand $\alpha \geqslant 1$.
4. Croissances comparées (en 0 et en $+\infty$) ; taux d'accroissement pour ln en 1 et pour exp en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de $x \longmapsto a^x$.

Calculs algébriques

1. Symbole $\sum$
   — Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
   — Relation de Chasles, sommation par paquets
   — Changement d'indice
   — Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles [1] : $\sum\limits_{k=0}^{n} k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a,b \in \mathbb{R}$, on a [1] : $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole $\prod$: règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
   — Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in [\![0,n]\!]$, et 0 sinon.

1. Résultat démontré en cours.

— Valeur quand $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = n$.
— Symétrie des coeffients binomiaux [1].
— Relation [1] $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ quand $n, p \in \mathbb{N}^*$.
— Formule du triangle de Pascal [1].
— Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.

9. Formule du binôme de Newton [1].