

## Programme des colles de la semaine du 6 octobre 2025

### Calculs algébriques

#### Questions de cours

1. Énoncer et démontrer la formule permettant la factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ , pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal. La démonstration se fera au moins dans le cas où les formules « avec factorielles » s'appliquent.
3. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.
4. Donner la liste des opérations élémentaires utilisées pour l'algorithme du pivot de Gauss. Expliquer, sur des exemples simples, ce qu'est un système échelonné.
5. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire renversée.
6. Rappeler quels encadrements caractérisent la partie entière d'un nombre réel, et démontrer l'équivalence entre les deux encadrements proposés.

#### Sommes et produits

1. Symbole  $\sum$ 
  - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
  - Relation de Chasles, sommation par paquets
  - Changement d'indice
  - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles<sup>1</sup> :  $\sum_{k=0}^n k$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a<sup>1</sup> :  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ .
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole  $\prod$  : règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  si  $p \in [0, n]$ , et 0 sinon.
  - Valeur quand  $p = 0$ ,  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = n$ .
  - Symétrie des coefficients binomiaux<sup>1</sup>.
  - Relation<sup>1</sup>  $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$  quand  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .
  - Formule du triangle de Pascal<sup>1</sup>.
  - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton<sup>1</sup>.

#### Systèmes linéaires

1. Notion de système linéaire.
2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.

---

1. Résultat démontré en cours.

## Quelques propriétés de la droite réelle

1. Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Propriétés usuelles.
2. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .
3. Valeur absolue
  - (a) Définition.
  - (b) Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
  - (c) Inégalité triangulaire. Généralisation à une somme de plus de deux termes.
  - (d) Interprétation, pour  $x, a \in \mathbb{R}$ , de  $|x - a|$  comme la distance de  $x$  à  $a$ .
4. Majorant, minorant d'une partie de  $\mathbb{R}$ . Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
5. Maximum (plus grand élément), minimum (plus petit élément) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
6. Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
7. Théorème admis : si  $A$  est une partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  (resp. une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ ).
8. Notation  $\sup(A) = +\infty$  si  $A$  n'est pas majorée. Notation  $\inf(A) = -\infty$  si  $A$  n'est pas minorée.
9. Partie entière d'un nombre réel. Caractérisation avec des encadrements. Croissance<sup>1</sup> de  $x \mapsto [x]$ . Graphe.