

## Programme des colles de la semaine du 13 octobre 2025

### Systèmes linéaires. Nombres réels. Trigonométrie

#### Questions de cours

1. Donner la liste des opérations élémentaires utilisées pour l'algorithme du pivot de Gauss. Expliquer, sur des exemples simples, ce qu'est un système échelonné.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire renversée.
3. Rappeler quels encadrements caractérisent la partie entière d'un nombre réel, et démontrer l'équivalence entre les deux encadrements proposés.
4. Donner les ensembles de définition des fonctions cos, sin et tan. Donner les formules d'addition et de duplication pour cos, sin et tan.
5. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions Arccos, Arcsin et Arctan, et les expressions des dérivées.
6. Démontrer que, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$  et  $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ .
7. Donner la définition de ch et sh. Énoncer et démontrer la formule pour  $\text{ch}^2 - \text{sh}^2$ .

#### Systèmes linéaires

1. Notion de système linéaire.
2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.

#### Quelques propriétés de la droite réelle

1. Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Propriétés usuelles.
2. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .
3. Valeur absolue
  - (a) Définition.
  - (b) Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
  - (c) Inégalité triangulaire. Généralisation à une somme de plus de deux termes.
  - (d) Interprétation, pour  $x, a \in \mathbb{R}$ , de  $|x-a|$  comme la distance de  $x$  à  $a$ .
4. Majorant, minorant d'une partie de  $\mathbb{R}$ . Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
5. Maximum (plus grand élément), minimum (plus petit élément) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
6. Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
7. Théorème admis : si  $A$  est une partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  (resp. une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ ).
8. Notation  $\sup(A) = +\infty$  si  $A$  n'est pas majorée. Notation  $\inf(A) = -\infty$  si  $A$  n'est pas minorée.
9. Partie entière d'un nombre réel. Caractérisation avec des encadrements. Croissance<sup>1</sup> de  $x \mapsto [x]$ . Graphe.

#### Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique. Angles en radians.
2. Définition géométrique de cosinus et sinus. Propriétés usuelles :
  - Relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$
  - Parité, périodicité, relations liées au décalage de  $\pi$  ou  $\frac{\pi}{2}$  de l'angle
  - Angles ayant même cosinus ; même sinus
  - Valeurs classiques

---

1. Résultat démontré en cours.

— Formules d'addition ; formules de duplication.

3. Exemples simples de résolutions d'équations ou d'inéquations trigonométriques en s'appuyant sur la lecture du cercle trigonométrique.
4. Tangente d'un angle. Propriétés usuelles du même type que celles énoncées ci-dessus.
5. Fonctions cosinus et sinus sur  $\mathbb{R}$  : graphes, dérivées.
6. Relation :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ .
7. Fonction tangente : ensemble de définition, périodicité, parité, classe  $C^\infty$ , dérivée, graphe.
8. Fonctions circulaires réciproques
  - Fonction Arcsin : définition, sens de variation, parité, caractère  $C^\infty$ , dérivée, graphe.
  - Fonction Arccos : définition, sens de variation, caractère  $C^\infty$ , dérivée, graphe.
  - Fonction Arctan : définition, sens de variation, limites, parité, caractère  $C^\infty$ , dérivée, graphe.

### **Trigonométrie hyperbolique**

1. Définitions des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.
2. Pour chacune : dérivée, sens de variation, limites, parité, graphe.
3. Relation  $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ .