Lycée Honoré de Balzac Novembre 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 17 novembre 2025

Calculs de primitives. Équations différentielles linéaires

Questions de cours

1. Expliquer comment calculer une primitive de ln à l'aide du théorème fondamental de l'intégration et d'une intégration par parties.
2. Énoncer les formules d'intégration par parties et de changement de variable.
3. Proposer une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ permettant de deviner sa valeur, avant de faire le calcul *via* le changement de variable $x = \sin(t)$ (ou $x = \cos(t)$).
4. Démontrer la stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
5. Énoncer et démontrer le principe de superposition dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Calculs de primitives

On considère des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Primitive d'une fonction. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{K}$.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction admettant une primitive, si $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique [1] primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = \alpha$.
3. Liste de primitives usuelles.
4. Propriétés pour l'instant admises de l'intégrale
   (a) Définition intuitive comme l'aire (algébrique) sous la courbe de la fonction intégrée
   (b) Linéarité de l'intégrale
   (c) Relation de Chasles
   (d) Positivité de l'intégrale. Cas d'une fonction continue et positive d'intégrale nulle.
   (e) Croissance de l'intégrale
   (f) Inégalité triangulaire pour les intégrales.
5. Théorème fondamental de l'intégration. Conséquence : une fonction continue sur I admet des primitives sur I.
6. Intégration par parties
7. Changement de variable
8. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}^*$.
9. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Équation du type $\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I, où a et b sont des fonctions continues sur I. Le cas où y' est multipliée par une fonction qui peut s'annuler donne lieu à l'étude de raccords ; quelques exemples simples ont été traités.
2. Cas d'une équation homogène
   (a) Stabilité de l'ensemble des solutions par combinaison linéaire [1]
   (b) Résolution de l'équation homogène.
3. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre [1] : la résolution passe par la recherche d'une solution particulière.
4. Principe de superposition [1]
5. Méthode de variation de la constante

1. Résultat démontré en cours.

6. Dans le cas d'une équation à coefficient a constant et de seconds membres spécifiques, on sait sous quelle forme chercher une solution particulière
   (a) second membre constant
   (b) second membre produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle (du type $x \longmapsto e^{sx}$ où $s \in \mathbb{C}$)
   (c) second membre combinaison linéaire de $x \longmapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $x \longmapsto \cos(\omega x + \varphi)$, où $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$, quand $a \in \mathbb{R}$.
7. Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire d'ordre 1.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 <u>à coefficients constants</u>

1. Équation homogène
   (a) Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de l'équation homogène
   (b) Résolution de l'équation homogène : ensemble des solutions à valeurs complexes [1] ; dans le cas de coefficients réels, ensemble des solutions à valeurs complexes et ensemble des solutions à valeurs réelles.
2. Équation avec second membre
   (a) Structure de l'ensemble des solutions
   (b) Principe de superposition
   (c) Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomial, ou exponentiel, ou combinaison linéaire de $t \longmapsto \cos(\omega t)$ et $t \longmapsto \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$.
3. Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (admis).