Lycée Honoré de Balzac — Novembre 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 24 novembre 2025

Équations différentielles linéaires. Ensembles

Questions de cours

1. Démontrer la stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
2. Énoncer et démontrer le principe de superposition dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.
3. Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Plus généralement, montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.
4. Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Plus généralement, montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.
5. Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on a : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Équation du type $\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I, où a et b sont des fonctions continues sur I. Le cas où y' est multipliée par une fonction qui peut s'annuler donne lieu à l'étude de raccords ; quelques exemples simples ont été traités.
2. Cas d'une équation homogène
   (a) Stabilité de l'ensemble des solutions par combinaison linéaire [1]
   (b) Résolution de l'équation homogène.
3. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre [1] : la résolution passe par la recherche d'une solution particulière.
4. Principe de superposition [1]
5. Méthode de variation de la constante
6. Dans le cas d'une équation à coefficient a constant et de seconds membres spécifiques, on sait sous quelle forme chercher une solution particulière
   (a) second membre constant
   (b) second membre produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle (du type $x \longmapsto e^{sx}$ où $s \in \mathbb{C}$)
   (c) second membre combinaison linéaire de $x \longmapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $x \longmapsto \cos(\omega x + \varphi)$, où $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$, quand $a \in \mathbb{R}$.
7. Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire d'ordre 1.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 <u>à coefficients constants</u>

1. Équation homogène
   (a) Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de l'équation homogène
   (b) Résolution de l'équation homogène : ensemble des solutions à valeurs complexes [1] ; dans le cas de coefficients réels, ensemble des solutions à valeurs complexes et ensemble des solutions à valeurs réelles.
2. Équation avec second membre
   (a) Structure de l'ensemble des solutions
   (b) Principe de superposition
   (c) Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomial, ou exponentiel, ou combinaison linéaire de $t \longmapsto \cos(\omega t)$ et $t \longmapsto \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$.
3. Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (admis).

Ensembles

1. Résultat démontré en cours.

1. Notion (intuitive) d'ensemble. Notation « $x \in E$ ». Description d'un ensemble au moyen d'accolades. Ensemble vide.
2. Parties d'un ensemble. Inclusion. Modèle de rédaction pour démontrer « à la main » une inclusion ; double inclusion pour montrer une égalité.
3. Ensemble des parties d'un ensemble. Notation $\mathcal{P}(E)$ pour l'ensemble des parties de l'ensemble E.
4. Complémentaire d'une partie d'un ensemble
   — Si A est une partie de E, notation $\overline{A}$ ou A^c pour le complémentaire.
   — Propriétés[1] : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{\overline{A}} = A, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
5. Intersection de deux parties d'un ensemble E ; intersection pour une famille quelconque de parties de E.
   — Notion de parties disjointes.
   — Propriétés usuelles relatives à la manipulation des intersections (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
6. Réunion de deux parties d'un ensemble E ; réunion pour une famille quelconque de parties de E. Propriétés usuelles relatives à la manipulation des réunions (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
7. Propriétés
   (a) Complémentaire d'une intersection de deux parties[1]
   (b) Complémentaire d'une réunion de deux parties[1]
   (c) Distributivité[1] de $\cap$ sur $\cup$
   (d) Distributivité de $\cup$ sur $\cap$
8. Différence $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ de deux parties d'un ensemble.
9. La différence symétrique $A \Delta B$ a été traitée en exemple.
10. Notion de recouvrement disjoint (resp. de partition) d'un ensemble.
11. Produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles E et F.
    — Si A est une partie de E et si B est une partie de F, alors $A \times B \subset E \times F$.
    — Extension à la notion de p-uplet.