

Programme des colles de la semaine du 1^{er} décembre 2025

Ensembles. Suites numériques

Questions de cours

- Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E , on a : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Plus généralement, montrer que si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E , $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.
- Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E , on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Plus généralement, montrer que si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E , $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.
- Montrer que, quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E , on a : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors leur somme et leur produit sont aussi des suites bornées.
- Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell'$ avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell + \ell'$.
- Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement.
- Énoncer le théorème de la limite monotone et en démontrer l'extrait suivant : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Ensembles

- Notion (intuitive) d'ensemble. Notation « $x \in E$ ». Description d'un ensemble au moyen d'accolades. Ensemble vide.
- Parties d'un ensemble. Inclusion. Modèle de rédaction pour démontrer « à la main » une inclusion ; double inclusion pour montrer une égalité.
- Ensemble des parties d'un ensemble. Notation $\mathcal{P}(E)$ pour l'ensemble des parties de l'ensemble E .
- Complémentaire d'une partie d'un ensemble
 - Si A est une partie de E , notation $\overline{A}$ ou A^c pour le complémentaire.
 - Propriétés¹ : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \overline{\overline{A}} = A, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$.
- Intersection de deux parties d'un ensemble E ; intersection pour une famille quelconque de parties de E .
 - Notion de parties disjointes.
 - Propriétés usuelles relatives à la manipulation des intersections (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
- Réunion de deux parties d'un ensemble E ; réunion pour une famille quelconque de parties de E . Propriétés usuelles relatives à la manipulation des réunions (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
- Propriétés
 - Complémentaire d'une intersection de deux parties¹
 - Complémentaire d'une réunion de deux parties¹
 - Distributivité¹ de $\cap$ sur $\cup$
 - Distributivité de $\cup$ sur $\cap$
- Différence $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ de deux parties d'un ensemble.
- La différence symétrique $A \Delta B$ a été traitée en exemple.
- Notion de recouvrement disjoint (resp. de partition) d'un ensemble.
- Produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles E et F .
 - Si A est une partie de E et si B est une partie de F , alors $A \times B \subset E \times F$.
 - Extension à la notion de p -uplet.

1. Résultat démontré en cours.

Suites numériques (les 4/5^e du chapitre)

1. Notion de suite numérique. On évoque trois façons de définir une suite : explicitement (avec une formule) ; par une relation de récurrence ; implicitement.
2. Notion de suite extraite.
3. Quelques suites particulières (première partie)
 - (a) Suites arithmétiques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
 - (b) Suites géométriques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
 - (c) Suites arithmético-géométriques. Définition ; méthode pour exprimer le terme général en fonction de l'indice.
4. Majorant, minorant, pour une suite réelle.
 - (a) Une suite u est bornée ssi la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.
 - (b) La somme et le produit de deux suites bornées donnent des suites bornées¹.
5. Suite croissante, décroissante, monotone.
6. Limite finie pour une suite réelle
 - (a) Définition (on fait le choix d'inégalités larges pour le jeu avec ε). Reformulations de la forme : pour tout intervalle ouvert contenant ℓ ...
 - (b) Unicité de la limite¹.
 - (c) Une suite convergente est bornée¹. Réciproque fausse.
 - (d) Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, alors¹ $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |\ell|$. Réciproque fausse.
 - (e) Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et $\ell > 0$, alors¹ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
 - (f) Opérations sur les limites finies.
 - (g) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors le produit $(u_n v_n)_n$ est une suite qui converge vers 0.
 - (h) Passage à la limite dans les inégalités larges¹.
 - (i) Théorème d'encadrement¹.
7. Limite infinie pour une suite réelle
 - (a) Définition.
 - (b) Si : $\forall n, u_n \leq v_n$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (resp. $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$) alors¹ $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (resp. $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$).
8. Récapitulatif des opérations sur les limites finies ou infinies, avec mise en valeur des cas d'indétermination (exemples pour montrer que tous les comportements sont possibles dans ces cas-là).
9. On fait mention d'un théorème qui sera revu dans le chapitre sur la continuité : si f est continue en x_0 et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0)$.
10. Limites et suites extraites
 - (a) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi, vers la même limite.
 - (b) Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers la même limite ℓ , alors¹ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
11. Théorème de la limite monotone¹.
12. Une suite croissante (resp. décroissante) qui converge est majorée (resp. minorée) par sa limite.
13. Suites adjacentes : définition ; théorème¹ : si deux suites sont adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite.