Lycée Honoré de Balzac — Décembre 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 8 décembre 2025

Suites numériques

Questions de cours

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors leur somme et leur produit sont aussi des suites bornées.
2. Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
3. Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement.
4. Énoncer le théorème de la limite monotone et en démontrer l'extrait suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. Donner la définition de l'approximation décimale d'un réel x, à la précision 10^{-n} ($n \in \mathbb{N}$), par défaut et par excès. Montrer que la distance entre ces approximations et x est inférieure ou égale à 10^{-n}.
6. Montrer que $\dfrac{n!}{n^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en admettant le résultat suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in [0, 1[$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Suites numériques

1. Notion de suite numérique. On évoque trois façons de définir une suite : explicitement (avec une formule) ; par une relation de récurrence ; implicitement.
2. Notion de suite extraite.
3. Quelques suites particulières (première partie)
   (a) Suites arithmétiques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
   (b) Suites géométriques. Définition ; expression du terme général en fonction de l'indice ; somme de termes consécutifs.
   (c) Suites arithmético-géométriques. Définition ; méthode pour exprimer le terme général en fonction de l'indice.
4. Majorant, minorant, pour une suite réelle.
   (a) Une suite u est bornée ssi la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.
   (b) La somme et le produit de deux suites bornées donnent des suites bornées [1].
5. Suite croissante, décroissante, monotone.
6. Limite finie pour une suite réelle
   (a) Définition (on fait le choix d'inégalités larges pour le jeu avec ε). Reformulations de la forme : pour tout intervalle ouvert contenant ℓ...
   (b) Unicité de la limite [1].
   (c) Une suite convergente est bornée [1]. Réciproque fausse.
   (d) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors [1] $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\ell|$. Réciproque fausse.
   (e) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell > 0$, alors [1] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
   (f) Opérations sur les limites finies.
   (g) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors le produit $(u_n v_n)_n$ est une suite qui converge vers 0.
   (h) Passage à la limite dans les inégalités larges [1].
   (i) Théorème d'encadrement [1].
7. Limite infinie pour une suite réelle
   (a) Définition.
   (b) Si : $\forall n,\ u_n \leqslant v_n$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$) alors [1] $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

1. Résultat démontré en cours.

8. Récapitulatif des opérations sur les limites finies ou infinies, avec mise en valeur des cas d'indétermination (exemples pour montrer que tous les comportements sont possibles dans ces cas-là).
9. On fait mention d'un théorème qui sera revu dans le chapitre sur la continuité : si f est continue en x_0 et si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, alors $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.
10. Limites et suites extraites
    (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, vers la même limite.
    (b) Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers la même limite ℓ, alors [1] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
11. Théorème de la limite monotone [1].
12. Une suite croissante (resp. décroissante) qui converge est majorée (resp. minorée) par sa limite.
13. Suites adjacentes : définition ; théorème [1] : si deux suites sont adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite.
14. Approximations décimales d'un réel [1]. Conséquence : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
15. Prolongement de la notion de limite finie aux suites de nombres complexes. Récapitulatif rapide des opérations possibles. Caractérisation de l'existence et la valeur d'une limite par usage de la partie réelle et de la partie imaginaire.
16. Quelques suites particulières (deuxième partie)
    (a) Existence et valeur éventuelle d'une limite pour une suite géométrique.
    (b) Croissances comparées usuelles
    (c) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : méthode pour exprimer le terme général en fonction de l'indice ; cas des coefficients complexes et cas des coefficients réels.
    (d) Suites récurrentes du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ »
        — Notion de point fixe pour une fonction. Lien avec le graphe et la droite d'équation $y = x$.
        — Notion de partie stable par une fonction et lien avec la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence.
        — Recherche des limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand f est continue.
        — Pistes d'étude quand f est croissante (monotonie de la suite, caractère majoré ou minoré, en lien avec les points fixes).
        — Rapide indication de la méthode quand f est décroissante : considérer (u_{2n}) et (u_{2n+1}).