Lycée Honoré de Balzac Janvier 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 12 janvier 2026

Applications. Calcul matriciel

Questions de cours

1. Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est injective.
2. Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont surjectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective.
3. Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et déterminer $(g \circ f)^{-1}$ en fonction de f^{-1} et g^{-1}.
4. Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et toute colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, expliquer en quoi et pourquoi le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
5. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (AB)^T = B^T A^T$.
6. Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, énoncer et démontrer la formule permettant de factoriser $A^p - B^p$ par $A - B$. On indiquera précisément où l'hypothèse $AB = BA$ est utile.
7. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (de même taille) est une matrice triangulaire supérieure, et préciser ce qui se passe pour les coefficients diagonaux.
8. Montrer que, pour toutes $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $AB \in GL_n(\mathbb{K})$, et donner la formule pour $(AB)^{-1}$.

Applications

1. Notion d'application d'un ensemble dans un autre. À l'usage, on utilisera indifféremment les mots « application » et « fonction ».
2. Application identité ; application constante.
3. Restriction d'une application à une partie de l'ensemble de départ.
4. Famille d'éléments d'un ensemble.
5. Fonction indicatrice d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une intersection, d'une réunion, d'un complémentaire.
6. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application et si A est une partie de E et B une partie de F, image directe $f(A)$, image réciproque $f^{-1}(B)$.
7. Composée d'applications.
   (a) Composition avec une application identité (au départ ou à l'arrivée).
   (b) Si f, g, h sont trois applications telles que, dans cet ordre, les composées existent, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; cette composée peut donc être notée $h \circ g \circ f$.
8. Notion d'application injective. Reformulations usuelles de la définition.
9. Notion d'application surjective. Reformulations usuelles de la définition.
10. Notion d'application bijective. Reformulations usuelles de la définition. Notion de bijection réciproque.
11. Une composée d'injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).
12. Bijection réciproque d'une composée de bijections.

Calcul matriciel

1. Définition.
2. Combinaisons linéaires de matrices (de même taille).
3. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrices élémentaires (de même taille).
4. Définition du produit matriciel.
5. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, AX est[1] une combinaison linéaire des colonnes de A, dont les coefficients sont ceux de X.
6. Règles de calcul usuelles sur le produit matriciel. Matrice nulle (de taille donnée), matrice identité (carrée d'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Résultat démontré en cours.

7. Produit de deux matrices élémentaires [1].
8. Transposée d'une matrice (notation : A^T).
9. Propriétés usuelles de la transposée vis-à-vis des combinaisons linéaires et du produit [1].
10. Matrices de transposition, de dilatation, de transvection, pour traduire par produit matriciel les opérations sur les lignes ou sur les colonnes.
11. Écriture matricielle des systèmes linéaires.
12. Systèmes linéaires compatibles. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible (lien avec les solutions du système linéaire homogène associé). Rappel sur l'algorithme du pivot de Gauss.
13. Matrices carrées
    (a) Matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice identité, matrices scalaires.
    (b) Exemples de matrices nilpotentes.
    (c) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors [1], pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p - B^p = (A - B)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$.
    (d) Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
    (e) Matrices triangulaires, matrices diagonales. Combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures). Produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) ; cas des coefficients diagonaux.
    (f) Ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices antisymétriques. Stabilité de ces ensembles par combinaison linéaire.
    (g) Exercice classique : toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
    (h) Matrices inversibles
        i. Définition.
        ii. Théorème admis : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ (resp. $BA = I_n$), alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
        iii. Existence et valeur de l'inverse d'un produit [1].
        iv. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, existence et valeur [1] de $(A^T)^{-1}$.
        v. Cas [1] des matrices carrées d'ordre 2.
        vi. Inversibilité des matrices relatives aux opérations élémentaires. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
        vii. Détermination de l'existence et calcul de l'inverse par la résolution d'un système linéaire. Théorème admis : caractérisation de l'inversibilité par la résolution d'un système homogène.
        viii. Vocabulaire : système de Cramer. Un système de Cramer admet une unique solution.
        ix. Critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires [1]. Cas particulier des matrices diagonales.