Lycée Honoré de Balzac — Janvier 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 26 janvier 2026

Limites et continuité. Arithmétique

Questions de cours

1. Montrer (avec la définition avec « ε ») que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et accompagner l'énoncé d'un dessin.
3. Montrer que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.
4. Donner un exemple de fonction continue sur un intervalle, majorée, dont la borne supérieure n'est pas un maximum. Expliquer en quoi le théorème des bornes atteintes ne s'applique pas.
5. Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{PGCD}(a, b + ak) = \mathrm{PGCD}(a,b)$.
6. Montrer que : si $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence : $m = \mathrm{PPCM}(a,b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a|m \text{ et } b|m \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a|n \text{ et } b|n) \Longrightarrow m|n \end{array} \right.$.
7. Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
8. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Limites et continuité

1. Notion de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.
2. Définition d'une limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$, en $+\infty$, en $-\infty$.
3. Unicité de la limite.
4. Continuité en un point ; sur un intervalle.
5. Limite à gauche, limite à droite. Conditions sur les limites à gauche et à droite pour que la limite existe.
6. Continuité à gauche, continuité à droite.
7. Prolongement par continuité.
8. Si f admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.
9. Opérations sur les limites finies : somme [1], produit [1], composition [1]. Propriétés correspondantes pour la continuité.
10. Limites infinies. Limite à gauche, limite à droite. Opérations.
11. Composée d'une suite et d'une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite [1].
12. Limites et ordre
    (a) Passage à la limite dans une inégalité, quand la limite existe.
    (b) Théorème d'encadrement.
    (c) Si $f \leqslant g$ et $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$) alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$).
13. Théorème de la limite monotone.
14. Théorème des valeurs intermédiaires [1]. Corollaire dans le cas d'une fonction strictement monotone.
15. Image d'un segment par une fonction continue (« théorème des bornes atteintes », admis).
16. Théorème de la bijection [1].
17. Prolongement des définitions et des résultats qui restent valables au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes. Caractérisation de la limite par les parties réelles et imaginaires.

Arithmétique

1. Divisibilité.
2. Théorème de division euclidienne [1].
3. Plus grand diviseur commun de deux entiers non tous les deux nuls : définition comme le plus grand diviseur commun aux deux nombres, au sens de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{Z}$.
4. Propriétés

---
1. Résultat démontré en cours.

(a) Pour $d \in \mathbb{N}$, on a $d = \text{PGCD}(a,b) \iff \begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (n|a \text{ et } n|b) \Longrightarrow n|d \end{cases}$.

(b) Propriétés d'usage, notamment : pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{PGCD}(a, b+ak) = \text{PGCD}(a,b)$.

5. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.
6. Nombres premiers entre eux.
7. Le théorème de Bézout a été vu en exercice *via* l'algorithme d'Euclide en version « étendue », et le lemme de Gauss en a été déduit.
8. Plus petit multiple commun de deux entiers non nuls. Propriétés usuelles.
9. Si $a, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'équivalence : $m = \text{PPCM}(a,b) \iff \begin{cases} a|m \text{ et } b|m \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big(a|n \text{ et } b|n\big) \Longrightarrow m|n \end{cases}$.
10. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = |ab|$. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PPCM}(a,b) = |ab|$.
11. Nombres premiers
    (a) Définition
    (b) Pratique du crible d'Ératosthème sur les premières valeurs
    (c) Si un nombre premier p ne divise pas un entier a, alors[1] p est premier avec a.
    (d) Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.
    (e) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier[1].
    (f) L'ensemble des nombres premiers est infini[1].
12. Théorème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
13. Conséquence pour la description de tous les diviseurs d'un entier.
14. Conséquence pour le calcul du PGCD et le PPCM de deux entiers non nuls, à l'aide des décompositions de l'un et de l'autre.
15. Nombres rationnels et nombres irrationnels.
    (a) Forme irréductible d'une fraction.
    (b) Stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme, produit et passage à l'inverse.
    (c) Nombres décimaux.