Lycée Honoré de Balzac — Février 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 16 février 2026

Polynômes

Questions de cours

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $a \in \mathbb{K}$, le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est égal à $P(a)$.
2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P)=n$ alors P admet au plus n racines.
3. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, si $x_1, \ldots, x_k$ sont racines de P, alors $\prod_{\ell=1}^{k}(X-x_\ell)$ divise P.
4. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes puis le critère pour déterminer la multiplicité d'une racine utilisant l'évaluation dérivées successives en a.
5. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P, avec la même multiplicité.
6. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ quand le polynôme P est non constant et scindé à racines simples.

Polynômes

1. Notion de polynôme à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Unicité des coefficients. Somme et produit de polynômes. Formule du binôme de Newton.
2. Degré d'un polynôme. Lien avec la somme et le produit de polynômes. Notation $\mathbb{K}_n[X]$ pour l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$.
3. Composition de polynômes.
4. Arithmétique : divisibilité, division euclidienne[1], algorithme associé.
5. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
6. Racine d'un polynôme
   (a) Définition
   (b) Le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est[1] $P(a)$.
   (c) Il en résulte que a est racine de P ssi $X-a$ divise P.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$: si P est de degré n, alors[1] P admet au plus n racines. Conséquences : si $\deg(P) \leqslant n$ et si P admet $n+1$ racines distinctes, alors $P=0$; un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul. On en déduit que l'on peut identifier polynôme et fonction polynomiale associée.
   (e) Si les scalaires $x_1, \ldots, x_k$ dont deux à deux distincts et sont racines de P, alors[1] $\prod_{\ell=1}^{k}(X-x_\ell)$ divise P.
   (f) Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a dans P comme $\max\left\{k \in \mathbb{N} \mid (X-a)^k \text{ divise } P\right\}$. On accepte la multiplicité 0 pour dire que a n'est pas racine de P.
   (g) Notion de polynôme scindé. Détermination directe de la multiplicités des racines quand le polynôme scindé est donné sous forme factorisée.
   (h) Relations coefficients-racines pour les polynômes scindés : cas de la somme et du produit des racines (comptées avec multiplicité).
   (i) Si $\deg(P)=n \in \mathbb{N}$ et si P admet n racines distinctes, alors[1] P est scindé à racines simples. Exemple : factorisation de X^n-1.
7. Dérivée formelle d'un polynôme. Dérivées successives.
8. Opérations sur les dérivées. Formule de Leibniz.
9. Formule de Taylor pour les polynômes[1].
10. Caractérisation de la multiplicité des racines par l'annulation des dérivées successives[1].
11. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

1. Résultat démontré en cours.

(a) Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)
(b) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
(c) Existence et unicité de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles (de degré 1)
(d) Conséquence : caractérisation de la divisibilité en termes de racines et de leurs multiplicités.

12. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$
    (a) Examen du cas des polynômes de degré 2 : les polynômes irréductibles de degré 2 sont ceux sont le discriminant est strictement négatif.
    (b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a[1] : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
    (c) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.
        i. Si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est racine de P et ces deux racines ont la même multiplicité[1].
        ii. Si z est racine de P et si z n'est pas réel (de sorte que $\overline{z} \neq z$), alors :
            — en notant $A = (X - z)(X - \overline{z})$, on a $A = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ et ainsi A est un polynôme à coefficients réels ;
            — le polynôme A est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$;
            — le polynôme A divise P.
    (d) Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.
    (e) Existence et unicité de la factorisation, dans $\mathbb{R}[X]$, en produit de facteurs irréductibles.
13. Fonctions rationnelles d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K}$
    (a) Définition
    (b) Théorème de décomposition en éléments simples, dans le cas où le dénominateur est scindé à racines simples (admis).
    (c) Méthodes pour calculer les coefficients.
    (d) En notant $f : x \longmapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ la fonction rationnelle étudiée, formule[1] : $\lambda = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$ pour le coefficient λ de l'élément simple associé au pôle a.
    (e) Dans le cas où le dénominateur a des racines multiples ou des facteurs irréductibles de degré 2, la forme de la décomposition doit être indiquée à l'étudiant.