

Programme des colles de la semaine du 9 mars 2026

Polynômes

Questions de cours

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $a \in \mathbb{K}$, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est égal à $P(a)$.
2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P) = n$ alors P admet au plus n racines.
3. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, si $x_1, \dots, x_k$ sont racines de P , alors $\prod_{\ell=1}^k (X - x_\ell)$ divise P .
4. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes puis le critère pour déterminer la multiplicité d'une racine utilisant l'évaluation dérivées successives en a .
5. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors $\bar{z}$ est aussi racine de P , avec la même multiplicité.
6. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$ quand le polynôme P est non constant et scindé à racines simples.

Polynômes

1. Notion de polynôme à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Unicité des coefficients. Somme et produit de polynômes. Formule du binôme de Newton.
2. Degré d'un polynôme. Lien avec la somme et le produit de polynômes. Notation $\mathbb{K}_n[X]$ pour l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$.
3. Composition de polynômes.
4. Arithmétique : divisibilité, division euclidienne¹, algorithme associé.
5. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
6. Racine d'un polynôme
 - (a) Définition
 - (b) Le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est¹ $P(a)$.
 - (c) Il en résulte que a est racine de P ssi $X - a$ divise P .
 - (d) Pour $n \in \mathbb{N}$: si P est de degré n , alors¹ P admet au plus n racines. Conséquences : si $\deg(P) \leq n$ et si P admet $n + 1$ racines distinctes, alors $P = 0$; un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul. On en déduit que l'on peut identifier polynôme et fonction polynomiale associée.
 - (e) Si les scalaires $x_1, \dots, x_k$ sont deux à deux distincts et sont racines de P , alors¹ $\prod_{\ell=1}^k (X - x_\ell)$ divise P .
 - (f) Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a dans P comme $\max \{k \in \mathbb{N} \mid (X - a)^k \text{ divise } P\}$. On accepte la multiplicité 0 pour dire que a n'est pas racine de P .
 - (g) Notion de polynôme scindé. Détermination directe de la multiplicités des racines quand le polynôme scindé est donné sous forme factorisée.
 - (h) Relations coefficients-racines pour les polynômes scindés : cas de la somme et du produit des racines (comptées avec multiplicité).
 - (i) Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$ et si P admet n racines distinctes, alors¹ P est scindé à racines simples. Exemple : factorisation de $X^n - 1$.
7. Dérivée formelle d'un polynôme. Dérivées successives.
8. Opérations sur les dérivées. Formule de Leibniz.
9. Formule de Taylor pour les polynômes¹.
10. Caractérisation de la multiplicité des racines par l'annulation des dérivées successives¹.
11. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

1. Résultat démontré en cours.

- (a) Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)
- (b) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
- (c) Existence et unicité de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles (de degré 1)
- (d) Conséquence : caractérisation de la divisibilité en termes de racines et de leurs multiplicités.

12. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

- (a) Examen du cas des polynômes de degré 2 : les polynômes irréductibles de degré 2 sont ceux dont le discriminant est strictement négatif.
- (b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a¹ : $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.
- (c) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.
 - i. Si z est racine de P , alors $\bar{z}$ est racine de P et ces deux racines ont la même multiplicité¹.
 - ii. Si z est racine de P et si z n'est pas réel (de sorte que $\bar{z} \neq z$), alors :
 - en notant $A = (X - z)(X - \bar{z})$, on a $A = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$ et ainsi A est un polynôme à coefficients réels ;
 - le polynôme A est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$;
 - le polynôme A divise P .
- (d) Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.
- (e) Existence et unicité de la factorisation, dans $\mathbb{R}[X]$, en produit de facteurs irréductibles.

13. Fonctions rationnelles d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K}$

- (a) Définition
- (b) Théorème de décomposition en éléments simples, dans le cas où le dénominateur est scindé à racines simples (admis).
- (c) Méthodes pour calculer les coefficients.
- (d) En notant $f : x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ la fonction rationnelle étudiée, formule¹ : $\lambda = \frac{A(a)}{B'(a)}$ pour le coefficient λ de l'élément simple associé au pôle a .
- (e) Dans le cas où le dénominateur a des racines multiples ou des facteurs irréductibles de degré 2, la forme de la décomposition doit être indiquée à l'étudiant.