

Programme des colles de la semaine du 16 mars 2026

Analyse asymptotique

Questions de cours

- Donner (au moins) deux des développements limités usuels, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0, en étant capable d'expliciter les premiers termes ; le choix des DL à réciter appartient à l'interrogateur : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0.
- Énoncé de la formule de Taylor-Young, avec les hypothèses proposées par le cours. On peut demander la démonstration, en admettant le théorème sur la primitivation des développements limités.
- Énoncer et démontrer le théorème sur les développements limités au voisinage de 0 des fonctions paires et des fonctions impaires.

Analyse asymptotique

- Relations de comparaison : cas des fonctions
 - Fonction négligeable devant une autre, au voisinage d'un point
 - Définition. Notation « o »
 - Règles de calcul usuelles.
 - Croissances comparées des fonctions usuelles.
 - Équivalence entre continuité en un point et développement limité à l'ordre 0 en ce point.
 - Équivalence entre dérivabilité en un point et développement limité à l'ordre 1 en ce point¹.
 - Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
 - Définition. Notation « $\sim$ »
 - Règles de calcul usuelles.
 - Obtention d'un équivalent par encadrement¹
 - Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point
 - Définition. Notation « O »
 - Règles de calcul usuelles.
- Développements limités
 - Définition
 - Unicité des coefficients dans un développement limité¹
 - Troncature d'un développement limité
 - Développement limité d'une combinaison linéaire
 - Développement limité d'un produit
 - Développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire)¹.
 - Primitivation d'un développement limité pour une fonction continue.
 - Formule de Taylor Young : si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , et on a la formule de Taylor-Young.
 - Développements limités usuels : au voisinage de 0, développement limité à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0. Ces développements ont été exprimés avec un reste en o ; on a indiqué en remarque la possibilité d'exprimer, grâce à l'existence du terme suivant, le reste sous la forme d'un O .
 - Exemples de calculs de limites et d'équivalents à l'aide de développements limités.
 - Exemple d'étude de la position relative de la courbe d'une fonction et de sa tangente en un point.
 - Recherche d'extrema sur un intervalle ouvert : condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique à l'aide du signe de la dérivée seconde.

1. Résultat démontré en cours.

- (m) Recherche d'asymptote à un graphe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
- 3. Relations de comparaison : cas des suites. On adapte tous les résultats au cas des suites.
- 4. Un exemple de développement asymptotique a été traité (méthode pour trouver un développement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^n e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$).