

Programme des colles de la semaine du 23 mars 2026

Analyse asymptotique. Espaces vectoriels

Questions de cours

1. Donner (au moins) deux des développements limités usuels, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0, en étant capable d'explicitier les premiers termes ; le choix des DL à réciter appartient à l'interrogateur : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0.
2. Énoncé de la formule de Taylor-Young, avec les hypothèses proposées par le cours. On peut demander la démonstration, en admettant le théorème sur la primitivation des développements limités.
3. Énoncer et démontrer le théorème sur les développements limités au voisinage de 0 des fonctions paires et des fonctions impaires.
4. Montrer qu'une famille est liée ssi l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
5. Montrer qu'une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.

Analyse asymptotique

1. Relations de comparaison : cas des fonctions
 - (a) Fonction négligeable devant une autre, au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « o »
 - ii. Règles de calcul usuelles.
 - iii. Croissances comparées des fonctions usuelles.
 - iv. Équivalence entre continuité en un point et développement limité à l'ordre 0 en ce point.
 - v. Équivalence entre dérivabilité en un point et développement limité à l'ordre 1 en ce point¹.
 - (b) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « $\sim$ »
 - ii. Règles de calcul usuelles.
 - iii. Obtention d'un équivalent par encadrement¹
 - (c) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point
 - i. Définition. Notation « O »
 - ii. Règles de calcul usuelles.
2. Développements limités
 - (a) Définition
 - (b) Unicité des coefficients dans un développement limité¹
 - (c) Troncature d'un développement limité
 - (d) Développement limité d'une combinaison linéaire
 - (e) Développement limité d'un produit
 - (f) Développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire)¹.
 - (g) Primitivation d'un développement limité pour une fonction continue.
 - (h) Formule de Taylor Young : si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , et on a la formule de Taylor-Young.
 - (i) Développements limités usuels : au voisinage de 0, développement limité à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0. Ces développements ont été exprimés avec un reste en o ; on a indiqué en remarque la possibilité d'exprimer, grâce à l'existence du terme suivant, le reste sous la forme d'un O .
 - (j) Exemples de calculs de limites et d'équivalents à l'aide de développements limités.
 - (k) Exemple d'étude de la position relative de la courbe d'une fonction et de sa tangente en un point.

1. Résultat démontré en cours.

- (l) Recherche d'extrema sur un intervalle ouvert : condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique à l'aide du signe de la dérivée seconde.
- (m) Recherche d'asymptote à un graphe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
- 3. Relations de comparaison : cas des suites. On adapte tous les résultats au cas des suites.
- 4. Un exemple de développement asymptotique a été traité (méthode pour trouver un développement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^n e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$).

Espaces vectoriels (1/3 du chapitre)

- 1. Notion de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- 2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où Ω est un ensemble.
- 3. Combinaison linéaire.
- 4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
- 5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- 6. Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel ¹.
- 7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\text{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\text{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- 8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de A sont les colonnes de la forme AX , où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\text{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
- 9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- 10. Famille libre.
- 11. Une famille est liée ssi ¹ l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
- 12. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ssi ¹ pour tout $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
- 13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A , on définit $\text{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \dots, C_p)$ est libre ssi $\text{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
- 14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre ¹.
- 15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
- 16. Composantes d'un vecteur dans une base.
- 17. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$:
 - (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres);
 - (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations;
 - (c) exercice-type : extraire une base d'une famille génératrice.