Lycée Honoré de Balzac — Avril 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 7 avril 2026

Espaces vectoriels

Questions de cours

1. Montrer qu'une famille est liée ssi l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
2. Montrer qu'une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
3. Dans chacun des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$, indiquer ce que l'on appelle la base canonique ; en déduire la dimension de chacun de ces espaces et ce que cela entraîne pour le nombre de vecteurs dans les familles libres et dans les familles génératrices.
4. Montrer que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
5. Montrer que si E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels en somme directe et si $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) est une famille libre de vecteurs de E_1 (resp. de E_2), alors la concaténation $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est une famille libre.

Espaces vectoriels

1. Notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où Ω est un ensemble.
3. Combinaison linéaire.
4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel [1].
7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de A sont les colonnes de la forme AX, où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
10. Famille libre.
11. Une famille est liée ssi [1] l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
12. Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre ssi [1] pour tout $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A, on définit $\mathrm{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \ldots, C_p)$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre [1].
15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
16. Composantes d'un vecteur dans une base.
17. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$:
    (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres) ;
    (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations ;
    (c) exercice-type : extraire une base d'une famille génératrice.
18. Base canonique de $\mathbb{K}^n$; base canonique de $\mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$; base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
19. Somme de deux sous-espaces vectoriels
    (a) Définition

1. Résultat démontré en cours.

   (b) Famille génératrice de la somme comme concaténation de familles génératrices de chaque espace[1].
20. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2
    (a) Définition
    (b) Caractérisation[1] par l'unique décomposition du vecteur nul comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2
    (c) Caractérisation[1] par $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
21. Sous-espaces supplémentaires.

Dimension finie

22. Un espace est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
23. Théorème de la base incomplète et conséquences : de toute famille génératrice on peut extraire une base ; tout espace de dimension finie admet au moins une base ; si E est de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base.
24. Si E est de dimension finie et admet une famille génératrice à p éléments, alors toute famille libre de E admet au plus p éléments.
25. Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments[1]. On appelle dimension de E ce nombre d'éléments.
26. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
27. Retour sur les ensembles de solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes ; des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes. Ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, homogène.
28. Soit E de dimension n.
    (a) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \dots, x_p)$ est une base de E.
    (b) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E, alors $p \geqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \dots, x_p)$ est une base de E.
29. Familles de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$. Retour sur la formule de Taylor pour les polynômes.
30. Si E est de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, on a : $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E$.
31. Définition : hyperplan d'un espace de dimension finie.
32. Définition : rang d'une famille de vecteurs. On remarque que le calcul du rang revient à extraire une base d'une famille génératrice.
33. Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie
    (a) Si $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de E_1, $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de E_2 et si E_1 et E_2 sont en somme directe, alors[1] la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de vecteurs de $E_1 \oplus E_2$.
    (b) Base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.
    (c) Dimension d'une somme directe.
    (d) Formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, dans le cas général[1].
    (e) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire[1].
    (f) Caractérisations des couples d'espaces supplémentaires à l'aide de la dimension.