

Programme des colles de la semaine du 13 avril 2026

Dénombrement

Questions de cours

1. Expliquer pourquoi, quand $f : E \rightarrow F$ est injective, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
2. Expliquer pourquoi, quand $f : E \rightarrow F$ est surjective, $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
3. Montrer que, pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E , $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$.
4. Montrer, de façon combinatoire, la symétrie des coefficients binomiaux.
5. Montrer par un argument combinatoire que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

Dénombrement

1. Notion d'ensemble fini. Cardinal.
2. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Cas d'égalité.
3. Applications entre deux ensembles finis E et F
 - (a) S'il existe $f : E \rightarrow F$ injective, alors¹ $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
 - (b) S'il existe $f : E \rightarrow F$ surjective, alors¹ $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
 - (c) S'il existe $f : E \rightarrow F$ bijective, alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.
 - (d) Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors¹ on a les équivalences : f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.
4. Cardinal d'une réunion disjointe.
5. Si A et B sont deux parties de E , $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$ et¹ $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$.
6. Formule du crible de Poincaré pour une réunion de deux parties finies¹.
7. Cardinal d'un produit cartésien¹.
8. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.
9. Nombre de parties d'un ensemble fini.
10. Notion de p -liste d'éléments de E . Nombre de p -listes.
11. Nombre de p -listes d'éléments distincts de E . Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
12. Permutations d'un ensemble fini. On applique en premier lieu ce vocabulaire aux bijections de l'ensemble dans lui-même, puis, dans un deuxième temps, aux n -listes d'éléments distincts, où n est le cardinal de l'ensemble.
13. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
14. Notation $\mathcal{P}_p(E)$ pour l'ensemble des parties de E ayant p éléments.
Définition : $\text{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$ où $n = \text{Card}(E)$.
15. On explique de façon combinatoire, à partir de cette définition, tous les résultats sur les coefficients binomiaux vus dans le chapitre de calculs algébriques : valeurs élémentaires, symétrie des coefficients binomiaux, relation $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, formule avec factorielles.

1. Résultat démontré en cours.