Lycée Honoré de Balzac — Mai 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 4 mai 2026

Dénombrement. Applications linéaires

Questions de cours

1. Montrer que, pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E, $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
2. Montrer, de façon combinatoire, la symétrie des coefficients binomiaux.
3. Montrer par un argument combinatoire que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.
4. Montrer qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.
5. Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
6. Montrer que si $E_1 \oplus E_2 = E$ et si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2, alors $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
7. Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective et si $(b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est libre.

Dénombrement

1. Notion d'ensemble fini. Cardinal.
2. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Cas d'égalité.
3. Applications entre deux ensembles finis E et F
   (a) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ injective, alors [1] $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (b) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ surjective, alors [1] $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (c) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
   (d) Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors [1] on a les équivalences : f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.
4. Cardinal d'une réunion disjointe.
5. Si A et B sont deux parties de E, $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ et [1] $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
6. Formule du crible de Poincaré pour une réunion de deux parties finies [1].
7. Cardinal d'un produit cartésien [1].
8. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.
9. Nombre de parties d'un ensemble fini.
10. Notion de p-liste d'éléments de E. Nombre de p-listes.
11. Nombre de p-listes d'éléments distincts de E. Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
12. Permutations d'un ensemble fini. On applique en premier lieu ce vocabulaire aux bijections de l'ensemble dans lui-même, puis, dans un deuxième temps, aux n-listes d'éléments distincts, où n est le cardinal de l'ensemble.
13. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
14. Notation $\mathcal{P}_p(E)$ pour l'ensemble des parties de E ayant p éléments.
    Définition : $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \dbinom{n}{p}$ où $n = \mathrm{Card}(E)$.
15. On explique de façon combinatoire, à partir de cette définition, tous les résultats sur les coefficients binomiaux vus dans le chapitre de calculs algébriques : valeurs élémentaires, symétrie des coefficients binomiaux, relation $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, formule avec factorielles.

Applications linéaires (deux tiers du chapitre)

1. Définition. Caractérisations.
2. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire [1].
3. Une composée d'applications linéaires est linéaire [1].

1. Résultat démontré en cours.

4. Linéarité de la composition à droite (resp. à gauche). Composée d'isomorphismes.
5. Linéarité de la bijection réciproque d'un isomorphisme.
6. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
7. Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sous-espaces vectoriels de leurs espaces respectifs [1].
8. Lien entre noyau et injectivité [1]. Lien entre image et surjectivité.
9. Équations linéaires du type « $f(x) = b$ ». Usage d'une solution particulière x_p (si elle existe, i.e. quand $b \in \mathrm{Im}(f)$) pour décrire l'ensemble des solutions comme $x_p + \mathrm{Ker}(f)$.
10. Cas des endomorphismes
    (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme. En particulier, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, notation f^k ; notion de polynôme de l'endomorphisme f.
    (b) Automorphismes de E. Notation $GL(E)$ et énoncé des propriétés relatives au groupe linéaire ($\mathrm{Id}_E \in GL(E)$, passage à l'inverse, stabilité par composition).
    (c) Homothéties.
    (d) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, projection p sur E_1 parallèlement à E_2.
       - Définition. Propriétés [1] : $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$.
       - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$, alors [1] $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ et f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
    (e) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
       - Définition. Propriétés [1] : $p = \dfrac{\mathrm{Id}_E + s}{2}$, $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \mathrm{Id}_E$, $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
       - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = \mathrm{Id}_E$, alors [1] en posant $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a $E_1 \oplus E_2 = E$ et f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
11. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \dots, b_n \in E$.
    (a) On suppose que $(b_1 \dots, b_n)$ est une famille génératrice de E. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
    (b) On suppose que f est injective et que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est libre.
    (c) On suppose que $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E. On a alors l'équivalence : f est injective ssi la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est libre.
    (d) Conséquence : si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E, on a l'équivalence :
    $$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la famille } \big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big) \text{ est une base de } F.$$
12. (a) Un espace E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et le choix d'un tel isomorphisme correspond au choix d'une base de E.
    (b) Deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.