

Programme des colles de la semaine du 11 mai 2026

Applications linéaires

Questions de cours

1. Montrer qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
3. Montrer que si $E_1 \oplus E_2 = E$ et si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , alors $E_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.
4. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et si (b_1, \dots, b_n) est une famille libre de vecteurs de E , alors $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre.
5. On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\dim(E) = \dim(F)$. Montrer alors que, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$: f est injective ssi f est bijective ssi f est surjective.
6. Dans le cas où E et F sont de dimension finie, montrer, pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$, que $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.
7. Dans le cas où E est de dimension finie, montrer que le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E .

Applications linéaires

1. Définition. Caractérisations.
2. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire¹.
3. Une composée d'applications linéaires est linéaire¹.
4. Linéarité de la composition à droite (resp. à gauche). Composée d'isomorphismes.
5. Linéarité de la bijection réciproque d'un isomorphisme.
6. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
7. Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sous-espaces vectoriels de leurs espaces respectifs¹.
8. Lien entre noyau et injectivité¹. Lien entre image et surjectivité.
9. Équations linéaires du type « $f(x) = b$ ». Usage d'une solution particulière x_p (si elle existe, i.e. quand $b \in \text{Im}(f)$) pour décrire l'ensemble des solutions comme $x_p + \text{Ker}(f)$.
10. Cas des endomorphismes
 - (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme. En particulier, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, notation f^k ; notion de polynôme de l'endomorphisme f .
 - (b) Automorphismes de E . Notation $GL(E)$ et énoncé des propriétés relatives au groupe linéaire ($\text{Id}_E \in GL(E)$, passage à l'inverse, stabilité par composition).
 - (c) Homothéties.
 - (d) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, projection p sur E_1 parallèlement à E_2 .
 - Définition. Propriétés¹ : $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $E_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$, $E_2 = \text{Ker}(p)$.
 - Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$, alors¹ $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$ et f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
 - (e) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .
 - Définition. Propriétés¹ : $p = \frac{\text{Id}_E + s}{2}$, $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \text{Id}_E$, $E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$, $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.
 - Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = \text{Id}_E$, alors¹ en posant $E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, on a $E_1 \oplus E_2 = E$ et f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .
11. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \dots, b_n \in E$.
 - (a) On suppose que (b_1, \dots, b_n) est une famille génératrice de E . Alors¹ la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.
 - (b) On suppose que f est injective et que la famille (b_1, \dots, b_n) est libre. Alors¹ la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre.

1. Résultat démontré en cours.

- (c) On suppose que (b_1, \dots, b_n) est une base de E . On a alors l'équivalence : f est injective ssi la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre.
- (d) Conséquence : si (b_1, \dots, b_n) est une base de E , on a l'équivalence :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la famille } (f(b_1), \dots, f(b_n)) \text{ est une base de } F.$$

12. (a) Un espace E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ ssi E est isomorphe à \mathbb{K}^n , et le choix d'un tel isomorphisme correspond au choix d'une base de E .
- (b) Deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

13. Applications linéaires de rang fini

- (a) Définition de $\text{rg}(f)$.
- (b) Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a ${}^1 \text{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.
- (c) Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a ${}^1 \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- (d) Avec les mêmes notations :

- si f est un isomorphisme, alors ${}^1 \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$;
- si g est un isomorphisme, alors ${}^1 \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

14. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit (b_1, \dots, b_n) une base de E . Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(b_k) = \beta_k$.

15. On admet pour l'instant : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

16. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a 1 :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

17. Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, notion d'inverse à droite et d'inverse à gauche. Si f est inversible à droite ou à gauche, alors f est inversible et son inverse à droite ou à gauche est sa bijection réciproque.

18. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et que $E = E_1 \oplus E_2$. Pour toutes $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.

19. Forme géométrique du théorème du rang 1 : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme entre tout supplémentaire S de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

20. Théorème du rang : si E est de dimension finie, $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$.

21. Formes linéaires et hyperplans

- (a) Définitions : formes linéaires, hyperplans.
Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.
- (b) Soit f une forme linéaire non nulle sur E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$). Alors ${}^1 \text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E .
- (c) Soit H un hyperplan de E . Il existe 1 une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \text{Ker}(f)$.
- (d) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E . On a l'équivalence

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda g).$$

- (e) Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.
- (f) Allure générale d'une forme linéaire (écriture en fonction des coordonnées des vecteurs, dans une base fixée).
Équation d'un hyperplan (en ayant fixé une base de E).