Lycée Honoré de Balzac — Juin 2026
PCSI

Programme des colles de la semaine du 8 juin 2026

Matrices et applications linéaires

Questions de cours

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, montrer l'équivalence : u est un isomorphisme si et seulement si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Dans ce cas, $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$.
2. Montrer les propriétés des matrices de passage : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$; $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
3. Énoncer et démontrer la formule de changement de base pour un vecteur. Énoncer la formule de changement de base pour un endomorphisme (avec même base au départ et à l'arrivée).

Matrices et applications linéaires

1. Matrice d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $n = \dim(E)$, l'application $E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme.
3. Matrice d'une application linéaire dans des bases ; notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ quand $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ est une base de F.
4. En notant $p = \dim(e)$ et $n = \dim(F)$, l'application $\mathscr{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est un isomorphisme. En particulier, $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
5. Lien entre relations vectorielles et produit matriciel ; avec les mêmes notations :
   (a) $\forall x \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$;
   (b) si $v \in \mathscr{L}(F,G)$ et si $\mathcal{B}_G$ est une base de G, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.
6. Dans le cas où $\dim(E) = \dim(F)$, on a l'équivalence[1] : u est un isomorphisme si et seulement si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Dans ce cas, $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$.
7. Cas d'un endomorphisme et d'une base qui est la même au départ et à l'arrivée.
8. Matrice de passage. Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ pour la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
9. Propriétés[1] : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$; $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est donc inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
10. Formule de changement de base pour un vecteur[1].
11. Formules de changement de base pour une application linéaire (en changeant la base de départ ou la base d'arrivée).
12. Cas d'un changement de base pour un endomorphisme (avec même base au départ et à l'arrivée).
13. Matrices semblables. Définition, propriétés élémentaires. Deux matrices semblables peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.
14. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, application $\mu_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \longmapsto AX$, canoniquement associée à A. La matrice de μ_A dans les bases canoniques est[1] A.
15. Image d'une matrice A : sous-espace engendré par les colonnes de A, et lien avec $\mathrm{Im}(\mu_A)$.
16. Noyau d'une matrice A : définition, lien avec $\mathrm{Ker}(\mu_A)$ et lien avec la recherche des relations linéaires entre les colonnes de A.
17. Rang d'une matrice.
18. Théorème du rang pour une matrice.
19. Calcul du rang d'une matrice par la résolution d'un système linéaire.
20. Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille (dans une base donnée) de cette famille. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de la matrice (dans des bases données) de cette application linéaire.
21. Caractérisations des matrices inversibles (noyau, image, inversibilité à droite, à gauche).
22. Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang. On applique cette propriété au calcul pratique du rang.
23. On admet qu'une matrice et sa transposée ont même rang.
24. Vocabulaire sur les systèmes linéaires et propriétés :
    — le rang d'un système linéaire homogène est le rang de la matrice associée ; il est lié à la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène par le théorème du rang ;
    — un système est compatible s'il admet au moins une solution ; cela revient à dire que la colonne-second membre est dans l'image de la matrice ;
    — un système dont la matrice est inversible s'appelle un système de Cramer ; un tel système admet une unique solution.

1. Résultat démontré en cours.