

Programme des colles de la semaine du 28 septembre 2026

Fonctions logarithme, exponentielle, puissances. Calculs algébriques

Questions de cours

1. Démontrer par étude(s) de fonction(s) les inégalités : $\forall t \in]-1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.
2. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.
3. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.
4. Énoncer et démontrer la formule permettant la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal. La démonstration se fera au moins dans le cas où les formules « avec factorielles » s'appliquent.
6. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall t > -1, \ln(1+t) \leq t$.
2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.
3. Fonctions puissances
 - (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (b) Notion de fonction polynomiale.
 - (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (d) Puissances non nécessairement entières : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
 - Règles de calcul usuelles.
 - Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$, variations, limites, suivant les valeurs de α .
 - Prolongement en 0 quand $\alpha > 0$; dérivabilité et caractère C^1 quand $\alpha \geq 1$.
4. Croissances comparées (en 0 et en $+\infty$) ; taux d'accroissement pour $\ln$ en 1 et pour $\exp$ en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de $x \mapsto a^x$.

Calculs algébriques

1. Symbole $\sum$
 - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
 - Relation de Chasles, sommation par paquets
 - Changement d'indice
 - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles¹ : $\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2, \sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$, on a¹ : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole $\prod$: règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
 - Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in [0, n]$, et 0 sinon.

1. Résultat démontré en cours.

- Valeur quand $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = n$.
 - Symétrie des coefficients binomiaux¹.
 - Relation¹ $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ quand $n, p \in \mathbb{N}^*$.
 - Formule du triangle de Pascal¹.
 - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton¹.