Lycée Honoré de Balzac — Février 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 5 février 2024

Calcul matriciel. Limites et continuité

Calcul matriciel

1. Définition.
2. Combinaisons linéaires de matrices (de même taille).
3. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrices élémentaires (de même taille).
4. Définition du produit matriciel.
5. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, AX est [1] une combinaison linéaire des colonnes de A, dont les coefficients sont ceux de X.
6. Règles de calcul usuelles sur le produit matriciel. Matrice nulle (de taille donnée), matrice identité (carrée d'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}^*$).
7. Produit de deux matrices élémentaires [1].
8. Transposée d'une matrice (notation : A^T).
9. Propriétés usuelles de la transposée vis-à-vis des combinaisons linéaires et du produit [1].
10. Matrices de transposition, de dilatation, de transvection, pour traduire par produit matriciel les opérations sur les lignes ou sur les colonnes.
11. Écriture matricielle des systèmes linéaires.
12. Systèmes linéaires compatibles. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible (lien avec les solutions du système linéaire homogène associé). Rappel sur l'algorithme du pivot de Gauss.
13. Matrices carrées
    (a) Matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice identité, matrices scalaires.
    (b) Exemples de matrices nilpotentes.
    (c) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors [1], pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p - B^p = (A-B)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$.
    (d) Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent [1].
    (e) Matrices triangulaires, matrices diagonales. Combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures). Produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) ; cas des coefficients diagonaux [1].
    (f) Ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices antisymétriques. Stabilité de ces ensembles par combinaison linéaire.
    (g) Exercice classique : toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
    (h) Matrices inversibles
        i. Définition.
        ii. Théorème admis : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ (resp. $BA = I_n$), alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
        iii. Existence et valeur de l'inverse d'un produit [1].
        iv. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, existence et valeur [1] de $(A^T)^{-1}$.
        v. Cas [1] des matrices carrées d'ordre 2.
        vi. Inversibilité des matrices relatives aux opérations élémentaires. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
        vii. Détermination de l'existence et calcul de l'inverse par la résolution d'un système linéaire. Théorème admis : caractérisation de l'inversibilité par la résolution d'un système homogène.
        viii. Vocabulaire : système de Cramer. Un système de Cramer admet une unique solution.
        ix. Critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires [1]. Cas particulier des matrices diagonales.

1. Résultat démontré en cours.

Limites et continuité (première partie)

1. Notion de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.
2. Définition d'une limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$, en $+\infty$, en $-\infty$.
3. Unicité de la limite.
4. Continuité en un point ; sur un intervalle.
5. Limite à gauche, limite à droite. Conditions sur les limites à gauche et à droite pour que la limite existe.
6. Continuité à gauche, continuité à droite.
7. Prolongement par continuité.
8. Si f admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.
9. Opérations sur les limites finies : somme, produit, composition. Propriétés correspondantes pour la continuité.
10. Limites infinies. Limite à gauche, limite à droite. Opérations.
11. Composée d'une suite et d'une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite [1].
12. Limites et ordre
    (a) Passage à la limite dans une inégalité, quand la limite existe.
    (b) Théorème d'encadrement [1].
    (c) Si $f \leqslant g$ et $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$) alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$).
13. Théorème de la limite monotone.