Lycée Honoré de Balzac
PCSI

Avril 2024

Programme des colles de la semaine du 2 avril 2024

Polynômes. Analyse asymptotique

Polynômes

1. Notion de polynôme à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Unicité des coefficients. Somme et produit de polynômes. Formule du binôme de Newton.
2. Degré d'un polynôme. Lien avec la somme et le produit de polynômes.
3. Composition de polynômes.
4. Arithmétique : divisibilité, division euclidienne [1], algorithme associé.
5. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
6. Racine d'un polynôme
   (a) Définition
   (b) Le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est [1] $P(a)$.
   (c) Il en résulte que a est racine de P ssi $X - a$ divise P.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$: si P est de degré n, alors [1] P admet au plus n racines. Conséquences : si $\deg(P) \leqslant n$ et si P admet $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$; un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul. On en déduit que l'on peut identifier polynôme et fonction polynomiale associée.
   (e) Si les scalaires $x_1, \ldots, x_k$ dont deux à deux distincts et sont racines de P, alors [1] $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{k}(X - x_\ell)$ divise P.
   (f) Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine dans P comme $\max\big\{k \in \mathbb{N} \mid (X-a)^k \text{ divise } P\big\}$. On accepte la multiplicité 0 pour dire que a n'est pas racine de P.
   (g) Notion de polynôme scindé. Détermination directe de la multiplicités des racines quand le polynôme scindé est donné sous forme factorisée.
   (h) Relations coefficients-racines pour les polynômes scindés [1] : cas de la somme et du produit des racines (comptées avec multiplicité).
   (i) Polynômes scindés à racines simples. Exemple : factorisation de $X^n - 1$.
7. Dérivée formelle d'un polynôme. Dérivées successives.
8. Opérations sur les dérivées. Formule de Leibniz.
9. Formule de Taylor pour les polynômes [1].
10. Caractérisation de la multiplicité des racines par l'annulation des dérivées successives [1].
11. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
    (a) Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)
    (b) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
    (c) Existence et unicité de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles (de degré 1)
    (d) Conséquence : caractérisation de la divisibilité en termes de racines et de leurs multiplicités.
12. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$
    (a) Examen du cas des polynômes de degré 2 : les polynômes irréductibles de degré 2 sont ceux sont le discriminant est strictement négatif.
    (b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a [1] : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
    (c) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.
       i. Si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est racine de P et ces deux racines ont la même multiplicité.
       ii. Si z est racine de P et si z n'est pas réel (de sorte que $\overline{z} \neq z$), alors :
          — en notant $A = (X-z)(X-\overline{z})$, on a $A = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$ et ainsi A est un polynôme à coefficients réels ;
          — le polynôme A est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$;

1. Résultat démontré en cours.

— le polynôme A divise P.

(d) Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

(e) Existence et unicité de la factorisation, dans $\mathbb{R}[X]$, en produit de facteurs irréductibles.

13. Fonctions rationnelles d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K}$
    (a) Définition
    (b) Théorème de décomposition en éléments simples, dans le cas où le dénominateur est scindé à racines simples (admis).
    (c) Méthodes pour calculer les coefficients.
    (d) En notant $f : x \longmapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ la fonction rationnelle étudiée, formule[1] : $\lambda = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$ pour le coefficient λ de l'élément simple associé au pôle a.
    (e) Dans le cas où le dénominateur a des racines multiples ou des facteurs irréductibles de degré 2, la forme de la décomposition doit être indiquée.

Analyse asymptotique (les 2/3 du chapitre)

1. Relations de comparaison : cas des fonctions
    (a) Fonction négligeable devant une autre, au voisinage d'un point
        i. Définition. Notation « o »
        ii. Règles de calcul usuelles.
        iii. Croissances comparées des fonctions usuelles.
        iv. Équivalence entre continuité en un point et développement limité à l'ordre 0 en ce point.
        v. Équivalence entre dérivabilité en un point et développement limité à l'ordre 1 en ce point[1].
    (b) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
        i. Définition. Notation « $\sim$ »
        ii. Règles de calcul usuelles.
        iii. Obtention d'un équivalent par encadrement[1]
    (c) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point
        i. Définition. Notation « O »
        ii. Règles de calcul usuelles.
2. Développements limités
    (a) Définition
    (b) Unicité des coefficients dans un développement limité[1]
    (c) Troncature d'un développement limité
    (d) Développement limité d'une combinaison linéaire
    (e) Développement limité d'un produit
    (f) Développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire)[1].
    (g) Formule de Taylor Young : si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et on a la formule de Taylor-Young.
    (h) Développements limités usuels : au voisinage de 0, développement limité à tout ordre de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), cos, sin, Arctan, ch, sh. Développement limité de tan à l'ordre 3 en 0.
    Ces développements ont été exprimés avec un reste en o ; on a indiqué en remarque la possibilité d'exprimer, grâce à l'existence du terme suivant, le reste sous la forme d'un O.