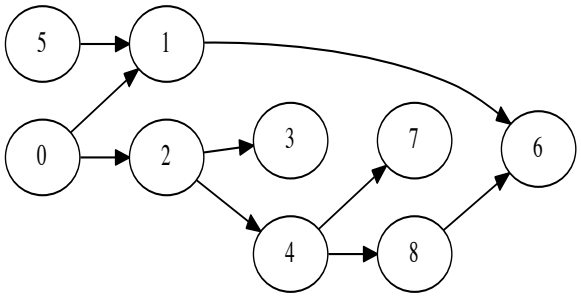
TP - Parcours de graphes

Comme il est de coutume, on lance spyder, et on poursuit sa lecture. On téléchargera depuis l'adresse `https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-bdb/docs?rep=117` le script `tpParcours.py` qu'on complètera ici.

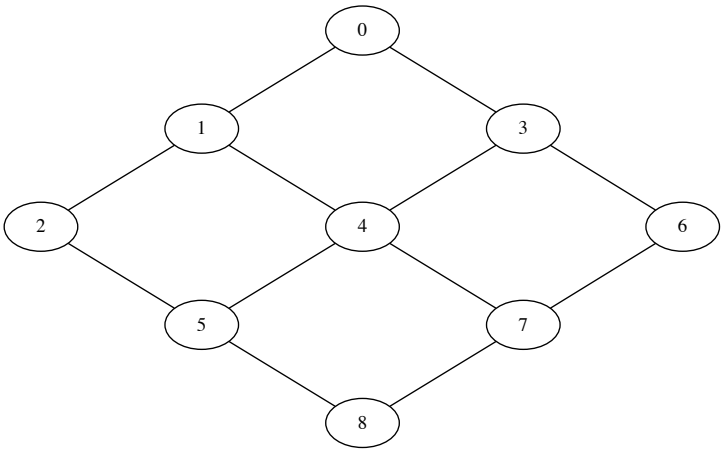
On reprendra au prochain TP celui de ce jour, donc ne pas oublier de sauvegarder votre travail dans votre répertoire personnel.

1 Quelques points de vocabulaire

Un graphe est la donnée d'un ensemble S de sommets, quelquefois appelés aussi nœuds, et d'un ensemble A d'arêtes. Les arêtes relient deux sommets, et peuvent être orientées (on parle alors de graphe orienté) ou non.



G_1 : un graphe orienté



G_2 : un graphe non-orienté

Les arêtes peuvent aussi être munies de poids (par exemple, le coût correspondant à son parcours, comme pourrait l'être une distance), ou non. Dans ce TP, nous n'étudierons que des graphes non pondérés, à l'image des deux exemples ci-dessus.

Nous coderons par ailleurs les graphes étudiés à l'aide de listes d'adjacence, où à chaque sommet on associe la liste de ses sommets voisins. On peut coder cela en python ou bien avec une liste de listes, en supposant les sommets numérotés à partir de 0 ou bien à l'aide d'un dictionnaire (ce qui ne suppose plus nécessairement les étiquettes des sommets formées d'entiers consécutifs, mais pouvant être aussi, par exemple, des chaînes de caractères)

Par exemple, le graphe G_1 peut être représenté par la liste `L1` valant `[[1, 2], [6], [3, 4], [], [7, 8], [1], [], [], [6]]`, ainsi par exemple `L1[4] = [7, 8]` ce qui indique que les deux sommets joints au sommet 4 sont les sommets 7 et 8, ou bien par le dictionnaire `D1` valant `{0: [1, 2], 1: [6], 2: [3, 4], 3: [], 4: [7, 8], 5: [1], 6: [], 7: [], 8: [6]}`

Parcourir un graphe depuis un sommet donné est déterminer l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis le sommet de départ en suivant les arêtes du graphe. Quel que soit l'algorithme employé, on devra toujours trouver les mêmes sommets, mais l'ordre d'obtention de ces sommets pourra, lui, différer. Par exemple, pour le graphe G_1 et depuis le sommet 0, tous les sommets du graphe seront obtenus, à l'exption du sommet 5. Depuis le sommet 3, aucun autre sommet que 3 ne sera obtenu.

Au contraire, depuis n'importe quel sommet de G_2, le parcours de ce graphe conduira à lister tous les sommets de G_2.

2 Parcours en largeur

Le parcours en largeur permet de lister dans un premier temps tous les sommets voisins du sommet initial, puis tous ceux à une distance de 2 arêtes, puis de 3 et ainsi de suite. Par exemple, pour le graphe G_2 depuis le sommet 0, un parcours en largeur pourrait être (il n'y a pas unicité d'un tel parcours) : (0, 1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 8).

La méthode classique pour implémenter un parcours en largeur consiste à utiliser une file d'attente (voir l'annexe pour quelques rappels sur `deque`). On introduira également une liste qui sera formée des sommets obtenus durant notre parcours. Il nous faut également garder trace des sommets déjà ajoutés à notre file pour ne pas tourner en rond !

```
Entrée : un graphe, donné par une liste d'adjacence LA (liste ou dictionnaire), et un sommet s
Sortie : une liste L des sommets parcourus (dans l'ordre)
   On initialise une file d'attente q, une liste L (sommets parcourus) et une autre vus
   On ajoute s à q et à vus
   Tant que q n'est pas vide :
      On retire un élément s1 de q (on peut réutiliser s si on veut) qu'on ajoute à L
      Pour chaque sommet s2 voisin de s1, s'il n'est pas déjà dans vus:
         on ajoute s2 à q et à vus.
```

Question 1. Implémenter l'algorithme présenté ci-dessus dans une fonction d'entête `def BFS(LA, s)`. Bien sûr, on testera avec les deux graphes G_1 et G_2.

Utiliser la liste `L1` ou le dictionnaire `D1` pour coder le graphe G_1 change-t-il ici quelque chose ?

3 Parcours en profondeur : version itérative

Pour parcourir un graphe G en profondeur depuis un sommet donné, on tâche de se déplacer depuis le sommet initial, en suivant les arêtes du graphe. Ce n'est qu'en parvenant à un cul-de-sac que l'on revient alors sur ses pas, jusqu'à trouver une arête non encore explorée, et on continue. Pour le graphe G_1, depuis le sommet 0, un parcours en profondeur pourrait être : (0, 1, 6, 2, 3, 4, 7, 8).

Question 2. Pour le graphe G_1, (0, 1, 6, 2, 3, 4, 7, 8) n'est pas le seul parcours en profondeur valable depuis le sommet 0. Donnez au moins un autre parcours possible. Combien de parcours en profondeur existe-t-il ?

Pour le graphe G_2, si un parcours en profondeur commence par $(0, 1, 4, 7, 6, 3)$, comment termine-t-il ?

Pour un parcours en profondeur, l'idée est de remplacer la file d'attente utilisée pour le parcours en largeur par une pile (où le premier élément extrait est le dernier ajouté, et non le premier comme pour les files d'attente) mais quelques autres petits changements sont à faire, car si on recopie à l'identique l'algorithme précédent en remplaçant la file d'attente par une pile, le parcours de G_2 depuis le noeud 0 conduit à $(0, 3, 6, 7, 8, 5, 2, 4, 1)$ qui n'est pas un parcours en profondeur. (L'explication est que le sommet 1 est ajouté dès la première itération à notre pile comme voisin du noeud 0 et qu'étant alors marqué comme vu, le parcours en profondeur croit être parvenu à un cul-de-sac.) La solution consiste à ne marquer comme vus que les sommets qui font effectivement partie de notre parcours (ceux qui ont été extraits de notre pile). L'écueil est qu'un même sommet pourra alors être ajouté plusieurs fois à notre pile (un nombre de fois au plus égal à son degré) et c'est en dépilant un sommet de la pile qu'il faut s'assurer qu'il n'a pas encore été visité. L'algorithme devient donc :

```
Entrée : un graphe, donné par une liste d'adjacence LA, et un sommet s (son indice)
Sortie : une liste L des sommets parcourus (dans l'ordre)
   On initialise une pile p, une liste L (sommets parcourus) et une autre vus
   On ajoute s à p
   Tant que p n'est pas vide :
      On dépile un élément s1 de p
      S'il n'est pas déjà dans vus:
         On l'ajoute à L et à vus
         Pour chaque sommet s2 voisin de s1 s'il n'est pas dans vus :
            on l'empile dans p.
```

Remarque 1. Si les objets `L` et `vus` sont comme proposés ci-dessus définis sous la même forme de listes en python, alors ils sont à tout moment identiques et il n'est pas utile de définir les deux, et on pourra donc n'introduire que l'un des deux dans la fonction qui suit. Il reste intéressant d'écrire cet algorithme avec ces deux variables dans la mesure où leur rôle diffère un peu : `L` contient le parcours de notre graphe et l'ordre de ses termes est important, tandis que dans `vus`, l'ordre n'a pas d'importance. On verra plus tard qu'une autre structure qu'une liste pour `vus` peut permettre d'améliorer la complexité de l'algorithme précédent (et justifie donc d'introduire à la fois `L` et `vus`).

Question 3. Implémenter l'algorithme présenté ci-dessus dans une fonction d'entête `def DFS(LA, s)`. Tester et comparer avec `BFS` (sur les graphes G_1 et G_2, par exemple `DFS(L1,0)` et `BFS(L1,0)`)

4 Parcours en profondeur : version récursive

Une implémentation élégante du parcours en profondeur est d'utiliser une fonction récursive. Parvenu à un sommet donné s, l'idée est de traverser chacune des arêtes issues de s (et que la liste d'adjacence nous donne) et pour ce faire, à chaque sommet voisin de s, notre fonction de parcours va s'invoquer elle-même. Le parcours depuis le sommet s va être la concaténation des parcours depuis chacun des voisins de s (du moins ceux que l'on va effectivement visiter, autrement dit ceux qui n'ont pas déjà été marqués comme visités). On rappelle que concaténer deux listes `L1` et `L2` est aussi simple que : `L1 + L2`.

Bien entendu, il ne faut pas passer deux fois sur un même sommet, ici encore il va falloir garder trace des sommets parcourus. Pour ce faire, on va introduire une variable non locale et qui formera plutôt un argument de notre fonction récursive et qui permettra de stocker ceux-ci. Ici encore, on utilisera pour simplifier une liste (initialement vide) qui se remplit des indices de sommets visités (voir en fin de sujet pour une amélioration possible).

Question 4. Compléter la fonction suivante pour parcourir en profondeur un graphe connu par sa liste d'adjacence depuis un sommet donné :

```
def DFS2(LA, s):
    vus = [] # vus est une variable locale à DFS2, mais pas à DFSrec qui suit :
    def DFSrec(LA, s, vus):
        parcours = [s]
        ...# on rajoute le sommet s à notre liste de sommets vus
        ...# pour tous les sommets voisins de s, on les visite (appel récursif)
        ...# s'ils␣ne␣l'ont pas encore été...
        return parcours

    return DFSrec(LA, s, vus)
```

Bien sûr, on testera avec G_1 et G_2. Comparer par exemple `DFS(D1,0)` et `DFS2(D1,0)`. Etait-ce prévisible ?

5 Annexe : rappels de syntaxe python

5.1 Listes

- longueur d'une liste : `len(L)`, on rappelle que les éléments de `L` ont pour indices les entiers `0` à `len(L)-1`.
- Concaténer deux listes : si `L1` et `L2` sont deux listes, l'opération `L1 + L2` renvoie une nouvelle liste, formée des éléments de `L1` suivis de ceux de `L2`. De ce fait, l'instruction `L1 = L1 + L2` remplace la liste `L1` par une nouvelle liste.

  A noter que l'instruction `L1 += L2` est un peu différente, puisqu'ici la liste `L1` n'est pas détruite pour être remplacée par une nouvelle liste, mais elle est modifiée, étendue donc, en y ajoutant, à la fin, les éléments de `L2`.

5.2 Dictionnaires

- Créer un dictionnaire vide : `d = dict()`, ou bien `d = {}`.
- Créer un dictionnaire avec déjà quelques associations (clés, valeurs) : `d = {'clé': [], 0: 'valeur'}`
- Ajouter une association (clé, valeur) à un dictionnaire : `d[nouvelle_clé] = valeur`
- Lire la valeur associée à une clé : `d[clé]` (laquelle donne la valeur associée, mais attention, si `clé` ne figure pas parmi les clés du dictionnaire, ceci conduit à une erreur de type `KeyError`)
- Vérifier la présence d'une clé : `if clé in d:` (contrairement aux listes, le test `clé in d` opère en temps constant, quelle que soit la taille du dictionnaire)
- Créer un dictionnaire avec une liste de clés `L`, en association une même valeur pour chaque clé :

```
d = {}
for i in L:
   d[i] = None # ou toute autre valeur bien sûr
# ou bien
d = {i: None for i in L} # version courte du code précédent
```

- Itérer sur les clés d'un dictionnaire : `for clé in d:` ou, ce qui revient au même : `for clé in d.keys():`

5.3 Piles, files d'attente, deque

On rappelle le type `deque` de python, qu'on importe par `from collections import deque`

On rappelle qu'avec un objet de type `deque`, on peut, de manière plus efficace qu'avec les listes : ajouter et retirer des éléments aussi bien à gauche qu'à droite, ce qui permet d'implémenter de manière efficace une file d'attente où les nouveaux éléments sont ajoutés d'un côté, et retirés de l'autre (peu importe bien sûr si on décide d'ajouter à droite et de retirer à gauche, ou de faire le contraire). On rappelle ainsi que, si `q` a été défini par `q = deque()` alors

- `q.append(obj)` rajoute `obj` à l'extrémité droite de `q`
- `q.appendleft(onj)` rajoute `obj` à l'extrémité gauche de `q`
- `q.pop()` retire l'objet situé à l'extrémité droite de `q` et renvoie celui-ci. Une erreur est déclenchée si `q` est vide.
- `q.popleft()` retire l'objet à l'extrémité gauche de `q` et renvoie celui-ci. Une erreur est déclenchée si `q` est vide.
- `len(q)` renvoie le nombre d'éléments contenus dans `q`.

Une pile peut quant à elle être implémentée, de manière équivalente, ou bien par une liste, avec les méthodes `append` et `pop`, ou bien par un objet `deque` (en prenant soin ou bien d'ajouter à droite et retirer à droite, ou bien d'ajouter à gauche et retirer à gauche)