Résumé du chapitre 1: logique et raisonnement

Table des matières

1 Assertions et connecteurs logiques

Définition.

Une assertion est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux

Définition (Connecteurs "non", "et" et "ou")**.**

- Soit P une assertion.
  On appelle négation de P et on note $non(P)$ l'assertion qui est vraie ssi P est fausse.
- Soient P et Q deux assertions.
  On note $P\,et\,Q$ l'assertion qui est vraie ssi les deux assertions sont vraies.
  On note $P\,ou\,Q$ l'assertion qui est vraie ssi au moins l'une des deux assertions est vraie.

Proposition (lois de De Morgan)**.**

Soit P et Q des assertions.
$non(P\,ou\,Q)$ équivaut à $non(P)\,et\,non(Q)$
$non(P\,et\,Q)$ équivaut à $non(P)\,ou\,non(Q)$

Définition (Connecteur $\Rightarrow$)**.**

Soit P et Q deux assertions.
On appelle "P implique Q" et on note $P \Rightarrow Q$ l'assertion telle que :
-dans le cas P vraie et Q vraie, $P \Rightarrow Q$ est vraie
-dans le cas P vraie et Q fausse, $P \Rightarrow Q$ est fausse
-dans le cas P fausse, $P \Rightarrow Q$ est vraie (quelle que soit la valeur de vérité de Q)

Proposition (Négation d'une implication)**.**

Soit P et Q deux assertions.
Par définition, $P \Rightarrow Q$ est fausse ssi P est vraie et Q est fausse.
$non(P \Rightarrow Q)$ équivaut à P et $non(Q)$.

Définition.

Soit P et Q deux assertions. $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$

Définition (Connecteur $\Leftrightarrow$)**.**

Soit P et Q deux assertions.
On appelle "P équivaut Q" et on note $P \Leftrightarrow Q$ l'assertion qui est vraie ssi P et Q ont même valeur de vérité.

Proposition (Une équivalence est une double implication)**.**

Soit P et Q deux assertions.
$P \Leftrightarrow Q$ équivaut à $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Définition.

Soit P et Q deux assertions.
$non(Q) \Rightarrow non(P)$ est appelée l'implication contraposée de $P \Rightarrow Q$

Proposition (Une implication et sa contraposée sont équivalentes)**.**

Soit P et Q des assertions. $P \Rightarrow Q$ équivaut à $non(Q) \Rightarrow non(P)$

2 Quantificateurs

Définition (Quantificateurs universel $\forall$ et existenciel $\exists$)**.**

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.
L'assertion "Pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$
L'assertion "Il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\exists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$

Proposition (Négation de quantificateurs)**.**

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.
$non(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ équivaut à $\exists x \in E, non(\mathcal{P}(x))$
$non(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ équivaut à $\forall x \in E, non(\mathcal{P}(x))$

Définition (Pseudo-quantificateur $\exists!$).

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.
L'assertion "Il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$

3 Méthodes de raisonnement

3.a Par disjonction des cas

3.b Par l'absurde

3.c Par implication

3.d Par récurrence