Résumé du chapitre 8: nombres complexes

Table des matières

1 Généralités

1.a Propriétés algébriques

Proposition.

$\mathbb{C}$ possède un élément privilégié, noté i, tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont réels (forme algébrique). La partie réelle de z est le réel $Re(z) = x$. La partie partie imaginaire de z est le réel $Im(z) = y$.

1.b Le plan complexe

1.c Conjugué

Définition.

On appelle conjugué d'un complexe $z = x + iy$ le complexe $\overline{z} = x - iy$.

Proposition.

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \,, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \,, \forall z \in \mathbb{C} \,, \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$

Proposition.

- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \,, \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\forall z \in \mathbb{C}^* \,, \overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \,, \overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

1.d Module

Définition.

On appelle module d'un complexe $z = x + iy$ le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Proposition.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z\overline{z} = |z|^2$

Proposition.

- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \,, |zz'| = |z||z'|$
- $\forall z \in \mathbb{C}^* \,, |\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \,, |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

Proposition.

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
$|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z \, ou \, \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'$ (cas d'égalité)

2 $\mathbb{U}$, $e^{i\theta}$ et trigonométrie

2.a $\mathbb{U}$ et $e^{i\theta}$

Définition.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition.

$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$ (les complexes de module 1 sont ceux de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$)
$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \theta + 2k\pi$

Proposition.

- $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2\,, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
- $\forall\theta \in \mathbb{R}\,, e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2\,, e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

Proposition.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
- $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler)

Démonstration.
- $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ donc $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\left\{\begin{array}{ll} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) & L_1 \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) & L_2 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{ll} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} & \frac{L_1+L_2}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} & \frac{L_1-L_2}{2i} \end{array}\right.$

□

Proposition.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$,
c'est-à-dire $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ (formule de Moivre).

2.b Formules de trigonométries

Proposition (Formules d'addition)**.**

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Démonstration. $cos(a+b) + isin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (cos(a) + i\sin(a))(cos(b) + isin(b))$
$= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\tan(a+b) = \frac{sin(a+b)}{cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

□

Corollaire (Formules de différence)**.**

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Proposition (Formules de l'angle double (ou de duplication)).

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

2.c Applications à la trigonométrie

3 Argument, formes trigonométrique et exponentielle

Définition.

On appelle argument d'un complexe non nul z tout réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. Si θ est un argument de z alors les autres argument de z sont les réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
La notation $arg(z)$ désigne un argument quelconque de z.

Proposition.

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous une forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ ou $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ (forme trigonométrique ou forme exponentielle).
Dans cette écriture, $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Proposition.

$\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2 \,, \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')(2\pi)$
$\forall z \in \mathbb{C}^* \,, arg(\frac{1}{z}) \equiv -arg(z)(2\pi)$
$\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2 \,, \arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')(2\pi)$

4 Equations du second degré

4.a Racines carrées complexes d'un complexe

4.b Résolution

Proposition.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.
On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$ le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée complexe de Δ.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double $z_1 = -\frac{b}{2a}$

Corollaire.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
Le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$ est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, le trinome admet deux racines réelles $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, le trinome admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine réelle double $z_1 = -\frac{b}{2a}$.

4.c Relations entre coefficients et racines

Proposition (relations entre coefficients et racines)**.**

Notons z_1 et z_2 les racines du trinôme $az^2 + bz + c$, distinctes ou non.
Alors $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

5 Racines n-ièmes

On fixe $n \in [[2, +\infty[[$.

Définition.

On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition.

Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [[0, n-1]]$. $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} | k \in [[0, n-1]]\}$.

Définition.

Soit Z un complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition.

Soit Z un complexe non nul. Ecrivons $Z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
$z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n-ième de Z.
Les racines n-ièmes de Z sont les complexes de la forme $z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [[0, n-1]]$.
(Autre conclusion : l'ensemble des racines n-ièmes de Z est $\{z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}} | k \in [[0, n-1]]\}$)

6 Exponentielle complexe

Définition.

Soit $z = x + iy$ un complexe. On pose $e^z = e^x e^{iy}$.

Proposition.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. $e^{z'} = e^z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z' = z + 2ik\pi$.

Proposition.

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \,, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- $\forall z \in \mathbb{C} \,, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \,, e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$