Résumé du chapitre 9: applications (suite)

Table des matières

E, F, G désignent des ensembles.

1 Antécédent, injectivité, surjectivité, bijectivité

1.a Antécédent

Définition.

Soit $f : E \to F$. Soit $y \in F$.
On appelle antécédent de y par f tout élément x de E tel que $y = f(x)$.

1.b Injectivité

Définition.

Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective (ou que f est une injection) ssi tout élément l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f.

Proposition.

Soit $f : E \to F$. f est injective ssi pour tout $(x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Proposition.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que f et g injectives. Alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration. $g \circ f : E \to G$

Soit $(x, x') \in E^2$. On suppose que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
$g(f(x)) = g(f(x'))$. Or g est injective. Donc $f(x) = f(x')$. Or f est injective. Donc $x = x'$.
Ainsi $g \circ f$ est injective.

□

1.c Surjectivité

Définition.

Soit $f : E \to F$.
On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) ssi tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f (c'est-à-dire : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$).

Proposition.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose f et g surjectives. Alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. $g \circ f : E \to G$

Soit $z \in G$.
g est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
$x \in E$ et $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
Donc tout élément $z \in G$ admet un moins un antécédent par $g \circ f$.
Donc $g \circ f$ est surjective.

□

1.d Bijectivité

Définition.

Soit $f : E \to F$
On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) ssi tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent par f (c'est à dire : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$).
Dans ce cas, on appelle application réciproque de f l'application $f^{-1} : F \to E$ qui a tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Proposition.

- Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Id_E est bijective et $Id_E^{-1} = Id_E$
- Soit $f : E \to F$ bijective. Alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. Montrons seulement la première assertion.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives.
$g \circ f : E \to G$
Soit $x \in E$ et $z \in G$.
$z = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow z = g(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(z) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(z)) = x \Leftrightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$
Donc tout élément $z \in G$ admet un unique antécédent par $g \circ f$, qui est $(f^{-1} \circ g^{-1})(z)$.
Donc $g \circ f$ est bijective et pour tout $z \in G$, $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$.

$(g \circ f)^{-1} : G \to E$. $g^{-1} : G \to F$ et $f^{-1} : F \to E$ donc $f^{-1} \circ g^{-1} : G \to E$.
De plus $(g \circ f)^{-1}$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ ont mêmes espaces de départ (G) et d'arrivée (E).
Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$\square$

Proposition.

Soit $f : E \to F$. f est bijective ssi f est injective et surjective.

2 Images directes

Définition.

Soit $f : E \to F$ et A une partie de E.
On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble $\{f(x) | x \in A\}$.
($f(A)$ est l'ensemble des éléments de la forme $f(x)$ avec $x \in A$.)
$f(A) \subset F$. $f(A) = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\}$.
($f(A)$ est l'ensemble des éléments de F admettant au moins un antécédent par f dans A.)

Proposition.

Soit $f : E \to F$. f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$.

3 Restriction, application induite

4 Prolongement

5 Graphe

6 Familles