Résumé du chapitre 10: fonctions usuelles

Table des matières

1 Logarithme, exponentielle, puissances

1.a Fonction ln

Définition.

On appelle logarithme néperien et on note ln l'unique primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1. Autrement dit :
$ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$
$ln(1) = 0$

Proposition.

$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$
$\forall x \in]0,+\infty[$, $ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)$
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$

Proposition.

ln est strictement croissante. $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$.

1.b Fonction exp

Définition.

La réciproque de la bijection $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est appellée exponentielle et notée $exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $exp(x) > 0$.

Proposition.

$exp(0) = 1$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$
$\forall x \in \mathbb{R}, exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$

Proposition.

$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une bijection continue strictement croissante.
En particulier, $\lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0^+$ et $\lim_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$.
exp est dérivable et $exp' = exp$.

Démonstration. ln est une bijection continue strictement croissante donc sa réciproque exp l'est également. ln est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$. D'après le théorème de dérivabilité de la réciproque, exp est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp'(x) = \frac{1}{ln'(exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{exp(x)}} = exp(x)$.

□

1.c Puissances

Définition-Propriété.

Soit $x \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $x^\alpha = exp(\alpha \ln(x))$.
On a $x^\alpha > 0$ et $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Proposition.

Soit $x \in]0, +\infty[$.
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$.

Proposition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$1^\alpha = 1$.
$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
$\forall x \in]0, +\infty[, (\frac{1}{x})^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$
$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $(\frac{x}{y})^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Proposition.

Soit $x \in]0, +\infty[$.
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Proposition.

— Soit $a \in]1, +\infty[$. Alors $a^x \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$.
— Soit $a \in]0, 1[$. Alors $a^x \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.

1.d Fonctions puissances

Définition-Propriété.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
f est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
Si $\alpha > 0$, f est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.
Si $\alpha < 0$, f est strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0^+$.

1.e Croissances comparées

Proposition (Croissances comparées)**.**

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
— $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$
— $e^{\alpha x} |x|^\beta \underset{x \to -\infty}{\to} 0$
— $\frac{ln(x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$
— $x^\alpha |ln(x)|^\beta \underset{x \to 0^+}{\to} 0$

2 Fonctions ch et sh

Définition.

On appelle cosinus hyperbolique la fonction ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
On appelle sinus hyperbolique la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition.

ch est paire et sh est impaire. $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{sh}(0) = 0$.
ch et sh sont dérivables. $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

Proposition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh'(x)=ch(x)		+	1	+	
sh(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch'(x)=sh(x)		-	0	+	
ch(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3 Fonctions cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan

3.a Fonctions cos et sin

Proposition.

cos est paire et sin est impaire. cos et sin sont 2π-périodiques.
cos et sin sont dérivables. $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

3.b Fonction tan

Proposition.

tan est impaire. tan est π-péridique.
tan est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Proposition.

tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. tan étant impaire, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

3.c Fonction arcsin

Définition.

On appelle arc sinus et on note arcsin la fonction réciproque de la bijection $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Autrement dit, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc le sinus vaut x.

Proposition.

arcsin est une bijection continue strictement croissante impaire.
arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Démonstration. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ est une bijection continue strictement croissante impaire. Donc sa réciproque arcsin l'est également.

sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin'(x) = \cos(x)$ donc $\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}\ ou\ x = \frac{\pi}{2}$. $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

(Explication détaillée $g:\left\{\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \sin(x)\end{array}\right.$ est une bijection strictement croissante dérivable et g' ne s'annule pas. Donc $g^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arcsin(x)\end{array}\right.$ est dérivable et pour tout $x\in]-1,1[$, $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$)

Par théorème de dérivabilité de la réciproque arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$.

Pour tout $y\in\mathbb{R}$, $|\cos(y)|=\sqrt{\cos^2(y)}=\sqrt{1-\sin^2(y)}$. Soit $x\in[-1,1]$. En prenant $y=\arcsin(x)$, on obtient $|\cos(\arcsin(x))|=\sqrt{1-x^2}$. Or $\cos(\arcsin(x))\geq 0$ car $\arcsin(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Donc $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$.

Ainsi pour tout $x\in]-1,1[$, $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

□

3.d Fonction arccos

Définition.

On appelle arc cosinus et on note arccos la fonction réciproque de la bijection $f:\left\{\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x)\end{array}\right.$. Autrement dit, $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ et pour tout $x\in[-1,1]$, $\arccos(x)$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

Proposition.

arccos est une bijection continue strictement décroissante.
arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$, $\arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.e Fonction arctan

Définition.

On appelle arc tangente et on note arctan la réciproque de la bijection $f:\left\{\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)\end{array}\right.$. Autrement dit, $\arctan:\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x

Proposition.

$\arctan:\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est une bijection continue strictement croissante impaire .
En particulier $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$.
arctan est dérivable et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. $f:\left\{\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)\end{array}\right.$ est une bijection continue strictement croissante impaire donc sa réciproque arctan l'est aussi.

tan est dérivable sur $]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x)=1+\tan^2(x)\neq 0$.

Par théorème de dérivabilité de la réciproque, arctan est dérivable et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\frac{1}{\tan'(\arctan(x))}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}$

□