Résumé du chapitre 11: primitives

Table des matières

1 Définition

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On appelle primitive de f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

2 Propriétés

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant au moins une primitive F.
Alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $F + \tilde{c}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Proposition.

Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue admet au moins une primitive.

3 Exemples usuels

Proposition.

$\int exp(x)dx = exp(x) + c^{te}$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c^{te}$ et $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c^{te}$
$\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + c^{te}$ et $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^{te}$ $(\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c^{te}$ et $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c^{te}$

Proposition.

$\int exp(f(x))f'(x)dx = exp(f(x)) + c^{te}$
$\int \cos(f(x))f'(x)dx = \sin(f(x)) + c^{te}$
$\int \sin(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + c^{te}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + c^{te}$
$\int f(x)^{\alpha}f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^{te}$ $(\alpha \neq -1)$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \arcsin(f(x)) + c^{te}$
$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \arctan(f(x)) + c^{te}$

Proposition.

$\int tan(x)dx = -ln(|\cos(x)|) + c^{te}$ sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Démonstration. $\int tan(x)dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx = -ln(|\cos(x)|) + c^{te}$
$(f(x) = \cos(x), \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + c^{te})$ □

4 Intégration par parties (IPP)

Proposition (IPP, version intégrale indéfinie)**.**

Soit $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$.

Proposition.

$\int ln(x)dx = xln(x) - x + c^{te}$

Démonstration. $\int ln(x)dx = xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + c^{te}$
(IPP $u'(x) = 1$, $v(x) = ln(x)$, $u(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{x}$) □

5 Changement de variables

Proposition (Changement de variable, version intégrale indéfinie)**.**

Soit $\varphi : I \to J$ de classe C^1 et $f : J \to \mathbb{R}$ continue.
Moyen-mnémotechnique : $y = \varphi(x)$ donne $dy = \varphi'(x)dx$ (car $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$)
$\int f(y)dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

6 Fonctions complexes