Résumé du chapitre 12: équations différentielles linéaires

Table des matières

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1.a Définition

Définition.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
(E) $y' + a(x)y = b(x)$
On appelle solution de l'équation toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que pour tout $x \in I$, $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
Lorsque a est une fonction constante, on dit que l'équation est à coefficient constant.
Lorsque b est la fonction nulle, on dit que l'équation est homogène (ou sans second membre)

1.b Résolution dans le cas homogène

Proposition.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue. On considère :
(E) $y' + a(x)y = 0$ (équation d'ordre 1 homogène)
Calculons A une primitive de a.
Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable
Considérons la fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(x) = y(x)e^{A(x)}$.
Par théorèmes opératoires, φ est dérivable et pour tout $x \in I$,

$\varphi'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}A'(x)$
$\varphi'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}a(x)$
$\varphi'(x) = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}$.
$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0$
$\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, \forall x \in I, e^{A(x)} \neq 0} \quad \forall x \in I, (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)} = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, \varphi'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, \varphi(x) = \lambda$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = \lambda$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}$
Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

$\square$

Corollaire.

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère :
(E) $y' + ay = 0$ (équation d'ordre 1 homogène à coefficient constant)
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.c Résolution dans le cas général

Proposition.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$. On considère :
(E) $y' + a(x)y = b(x)$ (équation d'ordre 1)
(E_0) $y' + a(x)y = 0$ (équation homogène associée à (E))
Soit y_p une solution particulière de (E).
Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_0 + y_p$ avec y_0 solution de (E_0).

1.d Recherche d'une solution particulière par variation de la constante

Proposition.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continues. On considère :
(E) $y' + a(x)y = b(x)$
(E_0) $y' + a(x)y = 0$
Calculons A une primitive de a
Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où λ est une constante.
(E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ où λ est une fonction.
(méthode de variation de la constante)

1.e Recherche d'une solution particulière dans des cas simples

1.f Recherche d'une solution particulière par superposition

Proposition (Principe de superposition)**.**

Soit $a : I \to \mathbb{K}$, $b_1 : I \to \mathbb{K}$, $b_2 : I \to \mathbb{K}$. On considère :
(E) $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$
(E_1) $y' + a(x)y = b_1(x)$
(E_2) $y' + a(x)y = b_2(x)$
Soit y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors $y_1 + y_2$ est solution de (E).

1.g Résolution avec condition initiale

Proposition.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continues. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
On considère le système : $(S) \left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$
Alors (S) admet une unique solution.

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.a Définition

Définition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $c : I \to \mathbb{K}$
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
(E) $y'' + ay' + by = c(x)$
On appelle solution de l'équation toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que pour tout $x \in I$, $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$.
Si c est la fonction nulle, on dit que l'équation est homogène (ou sans second membre)

2.b Résolution dans le cas homogène

Proposition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère :
(E) $y'' + ay' + by = 0$ (équation d'ordre 2 homogène à coefficients constants)
(C) $r^2 + ar + b = 0$ (équation caractéristique associée à (E))

- Si (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
- Si (C) admet une racine double r_1, alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu x e^{r_1 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
- On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si (C) admet deux racines distinctes complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.c Résolution dans le cas général

Proposition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $c : I \to \mathbb{K}$. On considère :
(E) $y'' + ay' + by = c(x)$ (équation d'ordre 2 à coefficients constants)
(E_0) $y'' + ay' + by = 0$ (équation homogène associée à (E))
Soit y_p une solution particulière de (E).
Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_0 + y_p$ avec y_0 solution de (E_0)

2.d Recherche d'une solution particulière dans des cas simples

2.e Recherche d'une solution particulière par superposition

Proposition (Principe de superposition)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $c_1 : I \to \mathbb{K}$ et $c_2 : I \to \mathbb{K}$. On considère :
(E) $y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x)$
(E_1) $y'' + ay' + by = c_1(x)$
(E_2) $y'' + ay' + by = c_2(x)$
Soit y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors $y_1 + y_2$ est solution de (E).

2.f Résolution avec conditions initiales

Proposition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue. Soit $x_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$.

On considère le système : $(S) \begin{cases} y'' + ay' + by = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Alors (S) admet une unique solution.