Résumé du chapitre 14: nombres réels

Table des matières

1 Opérations algébriques

2 Relation d'ordre $\leq$

3 Valeur absolue

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x le réel positif $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ |x \times y| = |x| \times |y|$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ |x + y| \leq |x| + |y|\, et\, |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x$ et y sont de même signe
(inégalité triangulaire et cas d'égalité)

4 Parties de $\mathbb{R}$

4.a Plus grand élément. Plus petit élément.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un plus grand élément ssi :
$\exists a \in A, \forall x \in A, x \leq a$
Dans ce cas, a est unique appelé le plus grand élément de A et noté $max(A)$.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un plus petit élément ssi :
$\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$
Dans ce cas, a est unique appelé le plus petit élément de A et noté $min(A)$

Proposition.

Toute partie de $\mathbb{R}$ finie non vide admet un plus grand et un plus petit élément.

4.b Majorant. Minorant

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est majorée ssi :
$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$.
Dans ce cas, on dit que M est un majorant de A.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est minorée ssi :
$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x$
Dans ce cas, on dit que m est un minorant de A.

Proposition.

Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.
Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée admet un plus petit élément.

4.c Borne supérieure. Borne inférieure.

Axiome-Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.
L'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément (axiome).
On appelle borne supérieure de A et on note $sup(A)$ le plus petit des majorants de A.

Proposition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
On suppose que A admet un majorant M (i.e. $\forall x \in A, x \leq M$).
$M = sup(A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \epsilon < x$ (caractérisation de la borne supérieure)

Démonstration. $M = sup(A)$
$\Leftrightarrow M$ est le plus petit des majorants de A
$\Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R}, M'$ est majorant de $A \Rightarrow M \leq M'$
$\Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R}, M' < M \Rightarrow M'$ n'est pas majorant de A
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, M - \epsilon$ n'est pas majorant de A (changement de variable $M' = M - \epsilon$)
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon < x$

□

Axiome-Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
L'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément (axiome).
On appelle borne inférieure de A et on note $inf(A)$ le plus grand des minorants de A.

Proposition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
On suppose que A admet un minorant m (i.e. $\forall x \in A, m \leq x$).
$m = inf(A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \epsilon$ (caractérisation de la borne inférieure)

4.d Partie bornée

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est bornée ssi A est minorée et majorée.

5 Intervalles

Proposition.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u, v) \in I^2 , \forall x \in \mathbb{R} , u \leq x \leq v \Rightarrow x \in I$
Alors I est un intervalle

6 Partie entière

Définition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k+1$
k est appelé la partie entière de x et noté $\lfloor x \rfloor$.