

Résumé du chapitre 17: limites de fonctions

Table des matières

1	Définition des limites réelles	1
2	Résultats sur les limites réelles	1
3	Définition des limites infinies	2
4	Résultats sur les limites infinies	2
5	Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$	2
6	Théorèmes d'existence de limites	3
6.a	Théorèmes opératoires	3
6.b	Théorèmes utilisant des inégalités	3
6.c	Théorème de la limite monotone	4
7	Passage à la limite dans les inégalités larges	4
8	Fonctions complexes	4

1 Définition des limites réelles

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

On dit que f admet un réel l pour limite en a ssi :

cas $a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

cas $a = +\infty : \forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

cas $a = -\infty : \forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

2 Résultats sur les limites réelles

Proposition (Théorèmes opératoires).

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2 . Alors $f + g$ admet en a la limite $l_1 + l_2$.
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l . Alors λf admet en a la limite λl .
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2 . Alors fg admet en a la limite $l_1 l_2$.
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l et $l \neq 0$. Alors pour tout x dans un voisinage de a , $f(x) \neq 0$ et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{l}$.
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2 et $l_2 \neq 0$. Alors $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{l_1}{l_2}$.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l . Alors $|f|$ admet $|l|$ pour limite en a .

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Si f admet une limite réelle en a , celle-ci est unique appelée la limite de f en a et est notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Si f admet une limite réelle en a alors f est bornée sur un voisinage de a .

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.
 Si f admet pour limite en a un réel l et $l < c$
 alors pour tout x dans un voisinage de a , $f(x) < c$.
 Si f admet pour limite en a un réel l et $l > c$
 alors pour tout x dans un voisinage de a , $f(x) > c$.

3 Définition des limites infinies

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a ssi :
 - cas $a \in \mathbb{R} : \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$
 - cas $a = +\infty : \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$
 - cas $a = -\infty : \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$
- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a ssi :
 - cas $a \in \mathbb{R} : \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A$
 - cas $a = +\infty : \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$
 - cas $a = -\infty : \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$

4 Résultats sur les limites infinies

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.
 Si f admet $+\infty$ pour limite en a , f est minorée sur un voisinage de a et non majorée.
 Si f admet $-\infty$ pour limite en a , f est majorée sur un voisinage de a et non minorée.

5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

Si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique, appelée la limite de f en a et notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Proposition.

Soit a un point I qui n'est pas une extrémité de I . Soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} L$

6 Théorèmes d'existence de limites

6.a Théorèmes opératoires

Proposition (Théorème opératoire de composition).

Soit $f : I \rightarrow J$ et $a \in \overline{I}$. Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow L} M$. Alors $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} M$.

6.b Théorèmes utilisant des inégalités

Théorème (Théorème de convergence par encadrement).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

$$- \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$$- f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \text{ et } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

Alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

Théorème.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$
(théorème de divergence par minoration)

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$
(théorème de divergence par majoration)

Théorème (Théorème de convergence par majoration de la distance).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$- \forall x \in I, |f(x) - l| \leq g(x)$$

$$- g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose que f admet 0 pour limite en a et g est bornée. Alors fg admet 0 pour limite en a .

6.c Théorème de la limite monotone

Théorème (théorème de la limite monotone).

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet une limite en a et f admet une limite en b .
(a peut être égal à $-\infty$ et b peut être égal à $+\infty$)

7 Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq c$ et f admet un réel l pour limite en a alors $l \leq c$.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq c$ et f admet un réel l pour limite en a alors $l \geq c$.

Corollaire.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et f et g admettent des réels l_1 et l_2 pour limite en a . Alors $l_1 \leq l_2$.

8 Fonctions complexes

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \bar{I}$. On dit que f admet un complexe l pour limite en a ssi :

$$\text{cas } a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, |t - a| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$$

$$\text{cas } a = +\infty : \forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall t \in I, t \geq B \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$$

$$\text{cas } a = -\infty : \forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall t \in I, t \leq B \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$$

Proposition (Caractérisation d'une limite complexe par les parties réelles et imaginaires).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \bar{I}$. On note $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f . Soit $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$. $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} l \Leftrightarrow x(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} l_1$ et $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} l_2$.