Résumé du chapitre 18: comparaisons de fonctions et de suites

Table des matières

1 Comparaisons de fonctions

1.a Définition

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On suppose que pour tout x dans un voisinage de a distinct de a, $g(x) \neq 0$
et, dans le cas $a \in I$ et $g(a) = 0$, $f(a) = 0$.
$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \Leftrightarrow x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur un voisinage de a
$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$

1.b Exemples usuels

Proposition.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$.
Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ tel que $a < b$. $a^x \underset{x\to+\infty}{=} o(b^x)$.

Proposition.

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x})$ et $ln(x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$.

Proposition (Equivalents usuels)**.**

$\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$,
$\exp(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} x$, $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$, $\ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $x^\alpha - 1 \underset{x\to1}{\sim} \alpha(x-1)$, $(1+h)^\alpha - 1 \underset{h\to0}{\sim} \alpha h$
$\mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$, $\cos(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$

Démonstration.
$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\to} \sin'(0) = \cos(0) = 1$ donc $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\to} \tan'(0) = 1+\tan^2(0) = 1$ donc $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \frac{\mathrm{sh}(x)-\mathrm{sh}(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\to} \mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$ donc $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\frac{exp(x)-1}{x} = \frac{exp(x)-exp(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\to} \exp'(0) = exp(0) = 1$ donc $exp(x)-1 \underset{x\to1}{\sim} x$
$\frac{ln(x)}{x-1} = \frac{ln(x)-ln(1)}{x-1} \underset{x\to1}{\to} \ln'(1) = \frac{1}{1}$ donc $ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$
En effectuant le changement de variable $x = h+1$ et $h = x-1$, $ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$
$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ est dérivable et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{x^\alpha-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to1}{\to} f'(1) = \alpha$ donc $\frac{x^\alpha-1}{\alpha(x-1)} \underset{x\to1}{\to} 1$ donc $x^\alpha - 1 \underset{x\to1}{\sim} \alpha(x-1)$
En effectuant le changement de variable $x = h+1$ et $h = x-1$, $(1+h)^\alpha - 1 \underset{h\to0}{\sim} \alpha h$
$\mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ et $\cos(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$ sont admis pour le moment.

□

1.c Propriétés de o et O

1.d Lien entre o et $\sim$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$.
Autrement dit, $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $f = g + h$ avec $h \underset{a}{=} o(g)$.

1.e Propriétés de $\sim$

Proposition.

Soit $a \in \overline{I}$.

- Pour tout $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^4$, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g ne s'annulent pas alors $\frac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g}$.
- Pour tout $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^4$, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 et g_2 ne s'annulent pas alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.
- Si f et g ne s'annulent pas, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f^k \underset{a}{\sim} g^k$.
- Si f et g sont à valeurs strictement positives, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Proposition.

Soit $a \in \overline{I}$.

- $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f \underset{a}{\sim} f$ (reflexivité)
- $\forall (f, g, h) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^3$, $f \underset{a}{\sim} g\, et\, g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité)
- $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie)

1.f Calcul d'équivalents : pièges à éviter et méthodes

1.g Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et g admet une limite en a.
Alors f admet en a la même limite que g.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose $f \underset{a}{\sim} g$.
Alors pour tout x dans un voisinage de a, $f(x)$ a même signe que $g(x)$.

2 Comparaisons de suites

2.a Définition

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles.
On suppose qu'à partir d'un certain rang v ne s'annule pas .
$u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow$ la suite $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée
$u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$.

2.b Propriétés de o et O

2.c Lien entre o et $\sim$

2.d Propriétés de $\sim$

2.e Calculs d'équivalents : pièges à éviter et méthodes

2.f Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.
On suppose que $u \sim v$ et v admet une limite. Alors u admet la même limite que v.

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose que $u \sim v$.
Alors pour tout n à partir d'un certain rang, u_n a même signe que v_n.