

Résumé du chapitre 19: continuité

Table des matières

1 Définitions	1
2 Propriétés élémentaires	2
2.a Théorèmes opératoires	2
2.b La notion de continuité en un point est locale	2
2.c Prolongement par continuité en un point	2
2.d Apport de la continuité aux limites	2
3 Propriétés globales des fonctions continues sur un intervalle	2
3.a Théorème des valeurs intermédiaires	2
3.b Théorème de la bijection et théorème de continuité de la réciproque	3
3.c Théorème des bornes atteintes	3
4 Fonctions complexes	3

1 Définitions

Définition-Propriété.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a ssi f admet une limite finie en a . Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est continue en $a \Leftrightarrow f(x) \underset{x \neq a}{\xrightarrow{x \rightarrow a}} f(a)$

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On suppose que a n'est pas l'extrémité supérieure de I .
On dit que f est continue à droite en a ssi $f(x) \underset{x \rightarrow a^+}{\rightarrow} f(a)$.
- On suppose que a n'est pas l'extrémité inférieure de I .
On dit que f est continue à gauche en a ssi $f(x) \underset{x \rightarrow a^-}{\rightarrow} f(a)$.

Proposition.

Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
 f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en a

Définition.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue ssi elle est continue en tout point de I .

2 Propriétés élémentaires

2.a Théorèmes opératoires

Proposition (Théorèmes opératoires).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors $f + g$ est continue.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est continue.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors fg est continue.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f}$ est continue.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue ne s'annulant pas. Alors $\frac{f}{g}$ est continue.

Démonstration. Montrons seulement le théorème opératoire de somme. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $f + g$ est continue. Soit $a \in I$. f et g continues en a donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$ donc $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) + g(a)$ donc $f + g$ continue en a . $f + g$ est continue en tout point de I donc $f + g$ est continue. \square

Proposition (Théorème opératoire de composition).

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration. Soit $a \in I$. f est continue en a et g est continue en $f(a)$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow f(a)} g(f(a))$ donc $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(f(a))$ donc $g \circ f$ continue en a . $g \circ f$ est continue en tout point de I donc $g \circ f$ est continue. \square

2.b La notion de continuité en un point est locale

2.c Prolongement par continuité en un point

Proposition.

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$.

f admet un prolongement par continuité en $a \Leftrightarrow f$ admet un réel l pour limite en a

Dans ce cas, la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$ est l'unique prolongement de f par continuité en a .

2.d Apport de la continuité aux limites

3 Propriétés globales des fonctions continues sur un intervalle

3.a Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(a, b) \in I^2$.

Soit t un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. $f(a) \leq t \leq f(b)$ ou $f(b) \leq t \leq f(a)$).

Alors il existe un réel c compris entre a et b (i.e. $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$) tel que $t = f(c)$.

Corollaire.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $J = f(I)$ est intervalle.

(L'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle)

3.b Théorème de la bijection et théorème de continuité de la réciproque

Théorème (Théorème de la bijection).

Soit f continue strictement monotone sur I . Posons $J = f(I)$. Alors f induit une bijection

de I dans J . Autrement dit, l'application $g : \begin{cases} I & \rightarrow & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ est bijective.

Proposition.

Soit $g : I \rightarrow J$ une bijection strictement monotone.

Alors g^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que g .

Théorème (Théorème de continuité de la réciproque).

Soit $g : I \rightarrow J$ une bijection continue strictement monotone. Alors g^{-1} est continue.

3.c Théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes).

On appelle segment tout intervalle fermé borné $[a, b]$ avec $a \leq b$.

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

Toute fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum.

4 Fonctions complexes

Proposition (Caractérisation de la continuité par les parties réelle et imaginaire).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Notons $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f .
 f est continue $\Leftrightarrow x$ et y sont continues