

# Résumé du chapitre 23: systèmes linéaires

## Table des matières

<b>1 Définitions</b>	<b>1</b>
<b>2 Utilité du système homogène associé</b>	<b>1</b>
<b>3 Opérations élémentaires sur les lignes</b>	<b>1</b>
<b>4 Utilisation d'un pivot de Gauss et algorithme de Gauss-Jordan</b>	<b>1</b>
4.a Utilisation d'un pivot de Gauss . . . . .	1
4.b Algorithme de Gauss-Jordan . . . . .	1
<b>5 Algorithme de résolution d'un système</b>	<b>1</b>
<b>6 Systèmes linéaires et matrices inversibles</b>	<b>2</b>
<b>7 Matrices d'opérations élémentaires</b>	<b>2</b>
7.a Sur les lignes . . . . .	2
7.b Sur les colonnes . . . . .	2

## 1 Définitions

## 2 Utilité du système homogène associé

**Proposition.**

Soit  $(\mathcal{L})$  un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues.  
Notons  $(\mathcal{L}_0)$  le système homogène associé.  
Soit  $s$  une solution de  $(\mathcal{L})$  (dite solution particulière).  
Alors les solutions de  $(\mathcal{L})$  sont les  $p$ -uplets de la forme  $s + t$  où  $t$  est une solution de  $(\mathcal{L}_0)$ .

## 3 Opérations élémentaires sur les lignes

## 4 Utilisation d'un pivot de Gauss et algorithme de Gauss-Jordan

### 4.a Utilisation d'un pivot de Gauss

### 4.b Algorithme de Gauss-Jordan

## 5 Algorithme de résolution d'un système

## 6 Systèmes linéaires et matrices inversibles

### Proposition.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $r$  le nombre de pivots obtenu en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice  $A$ .  $r \leq n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $r = n$
- ii) Le système homogène  $AX = 0_{n,1}$  n'admet que la solution nulle
- iii) Pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = Y$  admet une unique solution
- iv)  $A$  est inversible

### Proposition.

Toute matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure) de coefficients diagonaux non nuls est inversible et son inverse est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure)

## 7 Matrices d'opérations élémentaires

### 7.a Sur les lignes

#### Définition.

Soit  $\Sigma$  une opération élémentaire sur les matrices à  $n$  lignes. On appelle matrice de l'opération élémentaire  $\Sigma$  la matrice  $M_\Sigma$  obtenue en effectuant  $\Sigma$  sur les lignes de  $I_n$ .

#### Proposition.

Soit  $A$  une matrice à  $n$  lignes. En effectuant une opération élémentaire  $\Sigma$  sur les lignes de  $A$  on obtient la matrice  $M_\Sigma A$ .

#### Proposition.

Une matrice d'opération élémentaire sur les lignes est inversible.

### 7.b Sur les colonnes

#### Définition.

Soit  $\sigma$  une opération élémentaire sur les matrices à  $p$  colonnes. On appelle matrice de l'opération élémentaire  $\sigma$  la matrice  $M_\sigma$  obtenue en effectuant  $\sigma$  sur les colonnes de  $I_p$ .

#### Proposition.

Soit  $A$  une matrice à  $p$  colonnes. En effectuant une opération élémentaire  $\sigma$  sur les colonnes de  $A$  on obtient la matrice  $AM_\sigma$ .

**Proposition.**

Une matrice d'opération élémentaire sur les colonnes est inversible.