Résumé du chapitre 26: polynômes

Table des matières

1 $\mathbb{K}[X]$, somme, produit. Degré.

1.a $\mathbb{K}[X]$, somme, produit

Proposition.

$\mathbb{K}[X]$ possède un élement privilégié X appelé l'indéterminée. Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. On dit que les a_k, $k \in \mathbb{N}$ sont les coefficients de P.

1.b Degré

Définition.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
Si $P \neq 0$:
on appelle degré de P et on note $deg(P)$ le plus grand des entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $a_k \neq 0$
on appelle coefficient dominant de P et on note $dom(P)$ le coefficient $a_{deg(P)}$
on dit que P est unitaire ssi $dom(P) = 1$
on dit que $a_{deg(P)} X^{deg(P)}$ est le terme de plus haut degré de P
Si $P = 0$, on convient que $deg(P) = -\infty$.

Proposition.

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $deg(P + Q) \leq max(\{deg(P), deg(Q)\})$

Proposition.

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$

2 Evaluation. Composition.

2.a Evaluation

Définition.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$. On pose $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

2.b Composition

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme composé de P suivi de Q le polynôme $Q \circ P = Q(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k P^k$.

3 Polynôme dérivé. Polynômes dérivés successifs.

3.a Polynôme dérivé

Définition.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme $P' = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k k X^{k-1}$.

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(P+Q)' = P' + Q'$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(\lambda P)' = \lambda P'$. (linéarité)
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$ (règle de Leibnitz)

Proposition (Théorème opératoire de composition)**.**

$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(Q \circ P)' = (Q' \circ P) \times P'$

3.b Polynômes dérivés successifs

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P^{(0)} = P$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}$ est appelé le polynôme dérivé n-ième de P.

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$. (linéarité)
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(P \times Q)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$ (formule de Leibnitz)

Théorème (Formule de Taylor pour les polynômes)**.**

Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $deg(P) \leq n$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

4 Divisibilité. Division euclidienne.

4.a Divisibilité

Définition.

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que A divise B et on note $A|B$ ssi :
$\exists P \in \mathbb{K}[X],\ B = AP$

4.b Division euclidienne

Proposition.

$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R\, et\, deg(R) < deg(B)$
On dit que Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

5 Racines et ordres de multiplicité. Polynôme scindé.

5.a Racines et ordres de multiplicité.

Définition.

On appelle racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Proposition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est racine de $P \Leftrightarrow X - \alpha | P$.

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et α une racine de P.
Si $P \neq 0$, on appelle ordre de multiplicité de α le plus grand des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $(X - \alpha)^k$ divise P. Si $P = 0$, on convient que l'ordre de multiplicité de α est $+\infty$.

Proposition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
α est racine de P d'ordre $m \Leftrightarrow P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, ..., P^{(m-1)}(\alpha) = 0\, et\, P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

5.b Polynôme scindé

Définition.

Un polynôme non nul P est dit scindé sur $\mathbb{K}$ ssi il s'écrit sous la forme
$P = \lambda(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et x_1,...,x_n sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition (Somme et produit des racines d'un polynôme scindé)**.**

Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + ... + a_0$ un polynôme de degré n scindé de racines $x_1, ..., x_n$ (distinctes ou non). Alors $x_1 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $x_1 \times ... \times x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Proposition.

Un polynôme non nul P possède au plus $deg(P)$ racines comptées avec ordre de multiplicité. Un polynôme non nul P possède exactement $deg(P)$ racines comptées avec ordre de multiplicité ssi P est scindé.
Un polynôme non nul P possède au plus $deg(P)$ racines distinctes. Un polynôme non nul P possède exactement $deg(P)$ racines distinctes ssi P est scindé et ses racines sont simples.

Corollaire.

Tout polynôme de degré inférieur à n possédant au moins $n + 1$ racines comptées avec ordre de multiplicité est le polynôme nul.
Tout polynôme de degré inférieur à n possédant au moins $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Corollaire.

Tout polynôme ayant une infinité de racines distinctes est le polynôme nul.

Corollaire.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Soit D une partie de $\mathbb{K}$.
On suppose que pour tout $x \in D$, $P(x) = Q(x)$ et D est infini. Alors $P = Q$.

6 Décomposition en facteurs irréductibles

6.a Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème (de D'Alembert-Gauss)**.**

Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.

Théorème (de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}\left[X\right]$)**.**

Tout polynôme complexe non nul P est scindé donc s'écrit sous la forme
$P = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1}....(X - \alpha_p)^{m_p}$
où λ est un complexe non nul, α_1,...,α_p des complexes deux à deux distincts et m_1,...,m_p des entiers naturels non nuls.

6.b Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème (de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}\left[X\right]$).

Tout polynôme réel non nul P s'écrit sous la forme
$P = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}...(X-\alpha_p)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1}...(X^2+b_qX+c_q)^{n_q}$
où λ est un réel non nul, $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des réels deux à deux distincts, $X^2+b_1X+c_1$, ..., $X^2+b_qX+c_qX$ des polynômes réels de degré 2 sans racines réelles deux à deux distincts et $m_1, ..., m_p$, $n_1, .., n_q$ des entiers naturels non nuls.

7 Fonctions polynômiales