

Résumé du chapitre 28: développements limités (DL)

Table des matières

1 Définition, troncature, unicité	1
2 DL d'ordre 0 et 1, DL d'une primitive, formule de Taylor-Young	2
2.a DL d'ordre 0 et 1	2
2.b DL d'une primitive	2
2.c Formule de Taylor-Young	3
3 Opérations sur les DL	4
3.a Somme et multiplication par un réel	4
3.b Produit	4
3.c Puissances	5
3.d Changement de variable $x = a + h$	5
3.e Inverse	5
3.f Quotient	5
3.g Composée	5
3.h DL d'un quotient en un point d'annulation du dénominateur	5
3.i DL de $h \mapsto h^p f(a + h)$ et optimisations	5
4 Applications des DL	5
4.a Equivalents	5
4.b Limites	5
4.c Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une tangente	5
4.d Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une asymptote	5

1 Définition, troncature, unicité

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un DL d'ordre n en a ssi il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x - a) + \lambda_2(x - a)^2 + \dots + \lambda_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

ce qui équivaut à $f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \dots + \lambda_n h^n + o(h^n)$

(changement de variable $x = a + h$ et $h = x - a$)

Dans ce cas, la fonction polynômiale qui à h associe $\lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \dots + \lambda_n h^n$ est appelé la partie régulière du DL.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Démonstration.

- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Or $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ car $\frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$. Donc $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.
- $-x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ et $\frac{1}{1-y} \underset{y \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n y^k + o(y^n)$
 donc $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o((-1)^n x^n)$ donc $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$

□

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

On suppose que f admet un DL d'ordre n en a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \dots + \lambda_n h^n + o(h^n)$$

On suppose $p < n$. Alors f admet en a le DL d'ordre p :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \dots + \lambda_p h^p + o(h^p).$$

On dit que le DL d'ordre p est obtenu par troncature du DL d'ordre n .

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f admet un DL d'ordre n en a alors celui-ci est unique.

2 DL d'ordre 0 et 1, DL d'une primitive, formule de Taylor-Young

2.a DL d'ordre 0 et 1

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f admet un DL d'ordre 0 en $a \Leftrightarrow f$ est continue en a

Dans ce cas, ce DL est $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f admet un DL d'ordre 1 en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable en a

Dans ce cas, ce DL est $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

2.b DL d'une primitive

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f admet un DL d'ordre n en a : $f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

Soit F une primitive de f . Alors F admet le DL d'ordre $n+1$ en a suivant :

$$F(x) \underset{x \rightarrow a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Proposition.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Par DL d'une primitive, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

$$x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \text{ et } \frac{1}{1+y} \underset{y \rightarrow 0}{\rightarrow} 1 - y + y^2 - \dots + (-1)^n y^n + o(y^n)$$

$$\text{donc } \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Par DL d'une primitive, $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

□

2.c Formule de Taylor-Young

Théorème (Formule de Taylor-Young).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable.

Alors f admet en a le DL d'ordre n suivant : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n)$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Démonstration. Plaçons dans le cas $n \in \mathbb{N}^*$ (nécessaire à l'application de la formule de Taylor-Young).

- \exp est indéfiniment dérivable. $\exp' = \exp$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
- \exp est n fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

— $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ est indéfiniment dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

....

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$

f est n fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(1+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} h^k + o(h^n)$$

$$f(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} x^k + o(x^n) \text{ (variable muette)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Le cas $n=0$ peut s'obtenir par continuité en 0. □

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$— \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$— \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$— \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$— \operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Proposition.

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Démonstration. \tan est trois fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^3)$$

$$\tan(x) = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan(0) = 0$$

$$\tan' = 1 + \tan^2, \tan'(0) = 1$$

$$\tan'' = 2\tan \tan' = 2\tan(1 + \tan^2) = 2(\tan + \tan^3), \tan''(0) = 0$$

$$\tan''' = 2(\tan' + 3\tan^2 \tan') = 2\tan'(1 + 3\tan^2) = 2(1 + \tan^2)(1 + 3\tan^2), \tan'''(0) = 2$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \square$$

3 Opérations sur les DL

3.a Somme et multiplication par un réel

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f et g admettent des DL d'ordre n en a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(h) + o(h^n) \text{ et } g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} Q(h) + o(h^n)$$

Alors $f + g$ admet en a le DL d'ordre n suivant :

$$\text{Alors } f(a+h) + g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(h) + Q(h) + o(h^n)$$

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f admet un DL d'ordre n en a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(h) + o(h^n)$$

Alors λf admet en a le DL d'ordre n suivant :

$$\text{Alors } \lambda f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda P(h) + o(h^n)$$

3.b Produit

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f et g admettent des DL en a d'ordre n :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(h) + o(h^n) \text{ et } g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} Q(h) + o(h^n)$$

Alors $f \times g$ admet en a le DL d'ordre n suivant :

$$f(a+h)g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} T(h) + o(h^n) \text{ où } T \text{ est la troncature de } P \times Q \text{ à l'ordre } n.$$

3.c Puissances

3.d Changement de variable $x = a + h$

3.e Inverse

3.f Quotient

3.g Composée

3.h DL d'un quotient en un point d'annulation du dénominateur

3.i DL de $h \mapsto h^p f(a+h)$ et optimisations

4 Applications des DL

4.a Equivalents

4.b Limites

4.c Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une tangente

4.d Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une asymptote